# 4 АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 681.5.01

# СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА КОМБИНИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

**В.О. Никифоров, Г.В. Лукьянова**

Представлен синтез системы слежения, обеспечивающей асимптотическое воспроизведение сигнала задания, генерируемого линейным командным генератором. Предлагаемое решение не требует измерения координат вектора состояния командного генератора и основано на использовании специального наблюдателя производных сигнала задания.
**Ключевые слова**: внутренняя модель, наблюдатель, следящая система, система комбинированного управления.

## Введение

В подавляющем большинстве практических случаев построение высокоточных систем автоматического управления не может быть осуществлено без учета влияния внешних воздействий – сигналов задания и (или) внешних возмущений. Один из подходов к синтезу систем управления, работающих при внешних воздействиях, состоит в использовании принципа внутренней модели [1–6]. В соответствии с данным принципом, внешнее воздействие рассматривается в качестве выхода автономной динамической системы (командного генератора или генератора возмущения), а для асимптотического воспроизведения (или полной компенсации) внешнего воздействия модель генератора должна быть соответствующим образом воспроизведена в структуре замкнутой системы управления.

Принцип внутренней модели является хорошо разработанным для задач асимптотического слежения и предполагает построение систем комбинированного управления, содержащих в своей структуре обратные связи по ошибке слежения и прямые связи по сигналу задания [4–8]. Однако большинство представленных в литературе решений ориентировано на использование методов пространства состояний, что, в частности, требует измерения координат векторов состояния объекта управления и командного генератора.

В работе предложен метод синтеза, позволяющий избежать необходимости измерения координат векторов состояния и предполагающий использование специальных наблюдателей старших производных сигнала задания.

## Постановка задачи

Рассматривается линейный объект управления

$$y = k\frac{\beta(p)}{\alpha(p)}u, \tag{1}$$

где $y = y(t)$ – регулируемая переменная; $u = u(t)$ – сигнал управления; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; $\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \alpha_{n-2}p^{n-2} + \ldots + \alpha_0$ и $\beta(p) = p^m + \beta_{m-1}p^{m-1} + \beta_{m-2}p^{m-2} + \ldots + \beta_0$ – нормированные полиномы с известными постоянными коэффициентами $\alpha_i$ и $\beta_j$; $k$ – «высокочастотный» коэффициент усиления. Дополнительно полагается, что полином $\beta(p)$ является гурвицевым и $n \geq m$.

Будем считать, что сигнал задания $g = g(t)$ представим в виде выхода линейной модели (командного генератора) конечной размерности:

$$\dot{x} = \Gamma x, \tag{2}$$

$$g = c^T x. \tag{3}$$

В модели (2)–(3) $x$ – $q$-мерный вектор состояния командного генератора с начальным значением $x(0)$; $\Gamma$ – известная $q \times q$ матрица постоянных коэффициентов; $c$ – вектор постоянных коэффициентов соответствующей размерности. Без потери общности будем считать, что пара $(c^T, \Gamma)$ является полностью наблюдаемой. Будем также полагать, что модель (2)–(3) является виртуальной, вектор состояния командного генератора $x$ прямым измерениям недоступен, а измеряется зашумленный сигнал задания вида

$$\gamma = g + \delta, \tag{4}$$

где $\delta = \delta(t)$ – шум измерений (заранее не известная функция времени).

Рассматриваемая задача состоит в обеспечении условия

$$\lim_{t\to\infty}(g(t) - y(t)) = 0 \text{ при } \delta(t) \equiv 0, \tag{5}$$

или в обеспечении малой ошибки слежения $e = g - y$ в случае малой нерегулярной составляющей $\delta$.

*Замечание 1.* Здесь малость сигнала (т.е. малость функции времени) понимается в смысле какой-либо нормы амплитуды данного сигнала.

**Вспомогательные результаты**

Для синтеза наблюдателя производных сигнала задания используем следующий результат.

**Лемма 1** [9, 10]. *Сигнал задания $g$ может быть представлен в виде выхода модели*

$$\dot{\xi} = G\xi + l\,g\,, \tag{6}$$

$$g = \theta^T \xi\,, \tag{7}$$

*где $G$ – произвольная $q \times q$ гурвицева матрица постоянных коэффициентов, образующая с $q \times 1$ вектором постоянных коэффициентов $l$ полностью управляемую пару; $\theta^T = c^T P^{-1}$ – $1 \times q$ вектор постоянных коэффициентов; вектор состояния $\xi$ связан с вектором состояния $x$ командного генератора (3)–(4) соотношением подобия*

$$\xi = Px\,, \tag{8}$$

*а $q \times q$ матрица $P$ является решением матричного уравнения*

$$P\Gamma - GP = lc^T\,. \tag{9}$$

Тогда легко показать, что $i$-ая производная сигнала $g$ может быть представлена в виде [10]

$$g^{(i)} = \theta^T (G + l\theta^T)^i \xi\,, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

*Замечание 2.* В силу гурвицевости матрицы $G$ начальные условия модели (6) могут быть выбраны произвольными. Однако если $x(0)$ и $\xi(0)$ не согласованы (например, если $\xi(0) = 0$), то выражения (7) и (8) будут содержать дополнительное экспоненциально затухающее слагаемое, которым в дальнейшем рассмотрении будем пренебрегать.

При построении замкнутой системы автоматического управления будем использовать следующий результат.

**Лемма 2** [11–13]. *Пусть заданы произвольные нормированные полиномы*

$$A(p) = p^M + a_{M-1}p^{M-1} + a_{M-2}p^{M-2} \ldots + a_0\,,$$

$$B(p) = p^N + b_{N-1}p^{N-1} + b_{N-2}p^{N-2} \ldots + b_0\,,$$

*где $M > N$. Тогда существуют единственные полиномы*

$$R(p) = r_{N-1}p^{N-1} + r_{N-2}p^{N-2} + \ldots + r_0\,,$$

$$D(p) = p^{M-N} + d_{M-N-1}p^{M-N-2} + \ldots + d_0\,,$$

*удовлетворяющие уравнению*

$$A(p) = B(p)D(p) + R(p)\,.$$

**Основной результат**

Сформируем управление в виде

$$u = \frac{1}{k}\frac{d(p)}{D(p)\beta(p)}\left(\bar{g} - \frac{R(p)}{d(p)}y\right), \tag{10}$$

где $d(p)$ – произвольный нормированный гурвицев полином степени $n-1$, нормированный полином $D(p)$ степени $n-m-1$ и полином $R(p)$ степени $n-1$ являются решениями уравнения

$$d(p)\bar{\alpha}(p) = \alpha(p)D(p) + R(p) \tag{11}$$

с произвольным гурвицевым полиномом $\bar{\alpha}(p) = p^{n-m} + \bar{\alpha}_{n-m-1}p^{n-m-1} + \bar{\alpha}_{n-m-2}p^{n-m-2} + \ldots + \alpha_0$. При этом сигнал $\bar{g} = \bar{g}(t)$ формируется по правилу

$$\bar{g} = \bar{g}_{n-m} + \bar{\alpha}_{n-m-1}\bar{g}_{n-m-1} + \bar{\alpha}_{n-m-2}\bar{g}_{n-m-2} + \ldots + \bar{\alpha}_0 g\,, \tag{12}$$

где для формирования оценок $\bar{g}_i$ $i$-ых производных сигнала задания $g$ используется специальный наблюдатель, состоящий из вспомогательного фильтра

$$\dot{\xi} = G\xi + l\gamma \tag{13}$$

и блока расчета производных

$$\bar{g}_i = \theta^T (G + l\theta^T)^i \xi\,, \qquad i = 1, 2, \ldots n-m\,. \tag{14}$$

Размерность, свойства и правила выбора (расчета) матрицы $G$ и векторов $l$ и $\theta$ определены в лемме 1.

**Утверждение.** Управление, формируемое в соответствии с выражениями (10), (12)–(14), обеспечивает для объекта управления (1) выполнение целевого условия (5), а также малую ошибку слежения $e = g - y$ в случае малости нерегулярной составляющей $\delta$ .

*Доказательство*. С учетом подстановок $A(p) = d(p)\overline{\alpha}(p)$, $B(p) = \beta(p)$, $N = n$ и $M = 2n - 1$ из леммы 2 следует существование полиномов $D(p)$ и $R(p)$, удовлетворяющих уравнению (11). Подставляя далее управление (10) в (1), после элементарных преобразований (при этом происходит сокращение полиномов $\beta(p)$ и $d(p)$ ) получаем уравнение замкнутой системы:

$$y = \frac{1}{\overline{\alpha}(p)} \overline{g} \,. \qquad (15)$$

При $\delta(t) \equiv 0$ из леммы 1 следует, что уравнения (13) и (15) определяют старшие производные сигнала задания и, таким образом (см. (12)), $\overline{g} = \overline{\alpha}(p) g$ . Подставляя последнее равенство в (14), получаем $y = g$ , т.е. выполнение целевого условия (5). На самом деле имеет место не абсолютное равенство, а асимптотическое стремление $y$ к $g$ , так как мы пренебрегли экспоненциально затухающим слагаемым, вызванным несогласованностью начальных условий командного генератора и наблюдателя производных (см. замечание (2)). Так как для формирования оценок производных сигнала задания используется асимптотически устойчивый динамический фильтр (13) и операции умножения на постоянные коэффициенты (14), то можно показать, что присутствие в сигнале измерений $\gamma$ малой (в смысле амплитудной нормы) шумовой составляющей $\delta(t)$ приведет к малым ошибкам слежения (в отличие от попыток использования на практике операции дифференцирования, когда малый по амплитуде высокочастотный шум может привести к неограниченно большим ошибкам).

Обсудим предложенный алгоритм управления. Как было отмечено выше, в замкнутой системе управления происходит сокращение двух полиномов $-\beta(p)$ и $d(p)$ . По этой причине они должны быть гурвицевыми. Полином $d(p)$ назначается разработчиком и может быть интерпретирован как характеристический полином наблюдателя вектора состояния объекта управления. Полином $\beta(p)$ является числителем передаточной функции объекта управления, и его гурвицевость означает требование минимальной фазовости объекта управления. Как видно из выражения (15), полином $\overline{\alpha}(p)$ определяет динамику замкнутой системы и поэтому может быть интерпретирован как желаемый характеристический полином замкнутой системы. Известно, что минимальный динамический порядок замкнутой системы может быть обеспечен равным относительной степени исходного объекта управления, т.е. равным $n - m$ .

Предложенный алгоритм управления (10) является комбинированным, так как содержит обратную связь по регулируемой переменной $y$ , а также прямую связь $\overline{g}$ по сигналу задания, для формирования которой используется наблюдатель производных сигнала задания (13), (14).

**Пример**

Рассмотрим неустойчивый объект управления

$$y = 3\frac{p+2}{p^3 + 2p^2 - p + 1} u \,.$$

Пусть цель управления состоит в асимптотическом слежении за сигналом задания $g(t) = 5\sin(2t + 0{,}41)$, который можно представить в качестве выхода командного генератора вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad g = x_1, \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 9{,}17 \,.$$

Выберем $\overline{\alpha}(p) = p^2 + 5p + 6$, $d(p) = p^2 + 3p + 2$. Тогда, решая уравнение (11), находим $D(p) = p + 6$ и $R(p) = 12p^2 + 33p + 6$ . Пусть

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Решая уравнение (9), находим

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}115 & -0{,}288 \\ 1{,}153 & 0{,}115 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \theta^T = \begin{bmatrix} 0{,}334 & 0{,}834 \end{bmatrix}.$$

Тогда наблюдатель первой и второй производной сигнала задания будет описываться выражениями

$\dot{\xi}_1 = \xi_2$, $\quad \dot{\xi}_2 = -6\xi_1 - 5\xi_2 + 6\gamma$, $\bar{g}_1 = -3{,}33\xi_1 + 0{,}33\xi_2$, $\quad \bar{g}_2 = -1{,}33\xi_1 + -3{,}33\xi_2$,

где $\gamma = g + \delta$ является зашумленным сигналом задания, а $\delta$ – белый шум определенной интенсивности.

Выберем $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$.

Окончательно искомое управление принимает вид

$$u = \frac{1}{3}\frac{p^2+3p+2}{p^2+8p+12}\left(\bar{g} - \frac{12p^2+33p+6}{p^2+3p+2}y\right),$$

где сигнал $\bar{g}$ формируется по правилу

$$\bar{g} = \bar{g}_2 + 5\bar{g}_1 + 6\gamma.$$

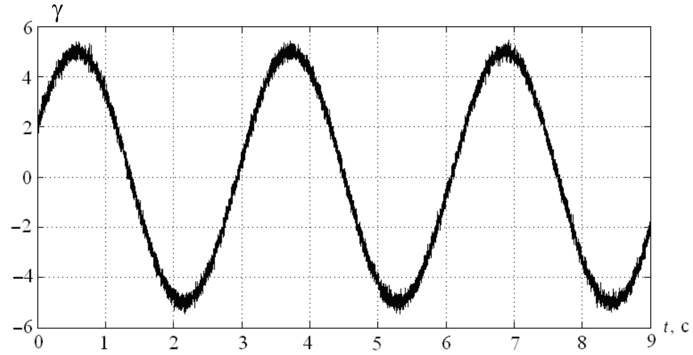


Рис. 1. Зашумленный сигнал задания, доступный измерениям


Рис. 2. Оценка первой производной ( $\dot{g}$ – первая производная сигнала задания, $\bar{g}_1$ – оценка первой производной сигнала задания $g$ )

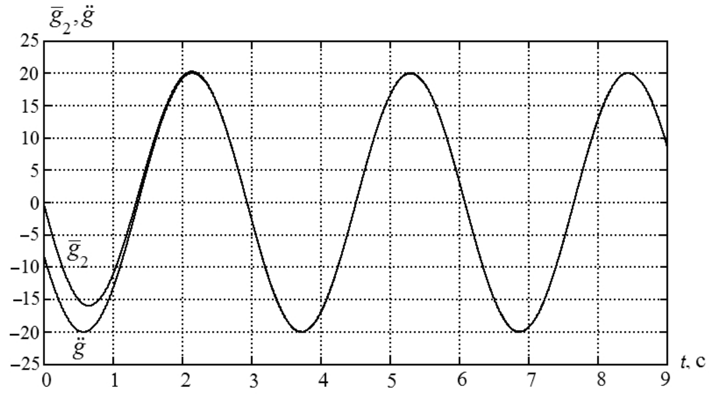


Рис. 3. Оценка второй производной ( $\ddot{g}$ – вторая производная сигнала задания, $\bar{g}_2$ – оценка второй производной сигнала задания $g$ )

Результаты моделирования переходных процессов в замкнутой системе приведены на рис. 1–4. На рис. 1 представлен зашумленный сигнал задания $\gamma = g + \delta$. На рис. 2, 3 представлены первая и вторая производные сигнала задания и их оценки. Как видно из рис. 2, 3, несмотря на существенную зашумленность сигнала задания, представленный наблюдатель обеспечивает точное восстановление его производных. На рис. 4 приведена ошибка слежения, демонстрирующая выполнение цели управления, т.е. высокую точность слежения за командным сигналом $g(t)$.

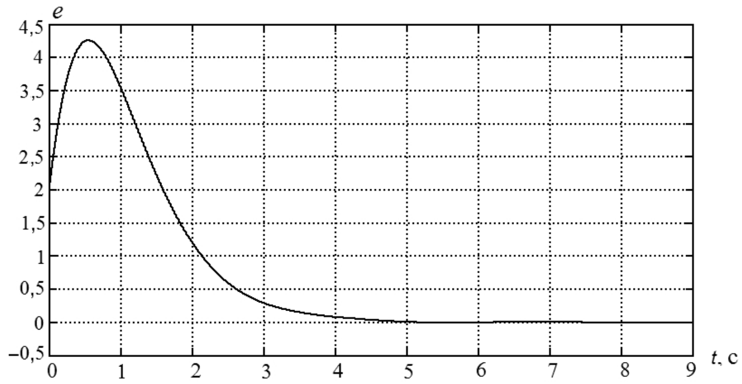


Рис. 4. Ошибка слежения

## Заключение

Представленная процедура синтеза позволяет построить для объекта «вход–выход» комбинированную систему слежения за командным генератором сигнала задания. Для построения управления не требуется измерения координат вектора состояния объекта или командного генератора. Предложенное решение основано на использовании специального наблюдателя производных сигнала задания. Как показано в работе и проиллюстрировано результатами моделирования, даже существенная зашумленность сигнала задания не приводит к потере работоспособности предложенной системы.

## Литература

1. Johnson C.D. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1971. – V. 16. – № 6. – P. 635–644.
2. Francis B.A. and W.M. Wonham The internal model principle for linear multivariable regulators // Appl. Mathematics and Optimization. – 1975. – № 2. – P. 170–194.
3. Davison E.J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1976. – V. 21. – № 1. – P. 25–34.
4. Уонем М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. – М.: Наука, 1980. – 376 с.
5. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков. – Л.: Машиностроение, 1983. – 245 с.
6. Дроздов В.Н., Мирошник И.В., Скорубский И.В. Системы автоматического управления с микроЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1989. – 284 с.
7. Акунов Т.А., Алишеров С., Оморов Р.О., Ушаков А.В. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывных объектов. – Бишкек: Илим, 1991. – 61 с.
8. Мирошник И.В., Никифоров В.О. Синтез линейных систем автоматического управления. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2000. – 54 с.
9. Nikiforov V.O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances // European Journal of Control. – 1998. – V. 4. – № 2. – P. 132–139.
10. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб: Наука, 2003. – 282 с.
11. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
12. Лукьянова Г.В., Никифоров В.О. Алгоритм компенсации внешних детерминированных возмущений: операторный метод синтеза // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2003. – № 10. – С. 5–10.
13. Бобцов А.А., Лукьянова Г.В., Никифоров В.О. Алгоритм компенсации внешнего гармонического возмущения неизвестной частоты для систем активной виброзащиты // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2007. – № 11. – С. 39–43.

***Никифоров Владимир Олегович*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, проректор, nikiforov@mail.ifmo.ru

***Лукьянова Галина Владимировна*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, зав. аспирантурой, gal-lou@yandex.ru