5 МЕХАНИКА И МЕХАТРОНИКА

УДК 531

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ВИБРОЗАЩИТНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

С.Е. Иванов

Для исследования виброзащитных систем необходим качественный и количественный анализ соответствующих математических моделей. В качестве модели принимается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая включает нелинейные характеристики в форме многочленов от фазовых переменных с постоянными и периодическими параметрами. При анализе нелинейных виброзащитных систем применяется метод многочленных преобразований, который позволяет получить достаточно подробные качественные и количественные характеристики динамики систем.

Ключевые слова: виброзащитная система, установившейся режим колебаний, нелинейная система с двумя степенями свободы.

Введение

Предметом рассмотрения являются нелинейные колебательные динамические системы полиномиальной структуры с периодическими коэффициентами [1].

Исследование колебательных процессов в таких системах может проводиться различными методами нелинейной механики [2]. В работах А. Пуанкаре, Б. ван дер Поля, А.Н. Крылова, Н.Н. Боголюбова, А.А. Андронова предложены теоретические методы исследования нелинейных динамических систем [3]. Метод преобразования дифференциальных уравнений в форме степенных многочленов по фазовым переменным был предложен в работах А. Пуанкаре и А. Дюляка. Применение этих методов связано с большим объемом вычислений, что приводит к необходимости создания алгоритмов и программ, позволяющих эффективно выполнять требуемые выкладки средствами вычислительной техники.

С целью расширения области применения указанный метод был модифицирован в работе Г.И. Мельникова [4] и получил название метода многочленных преобразований. Данный метод применим к широкому кругу нелинейных задач, где нелинейные части системы дифференциальных уравнений имеют общую структуру. Динамические системы описываются дифференциальными уравнениями до шестого порядка с нелинейной частью в виде многочлена до четвертой степени относительно фазовых координат с периодическими коэффициентами.

Для реализации метода многочленных преобразований автором составлен пакет программ, позволяющий проводить исследования установившихся и переходных режимов колебаний нелинейных виброзащитных систем с двумя степенями свободы в условиях периодического кинематического возмущения [5]. Точность получаемых результатов подтверждается посредством сравнения с решениями, получаемыми численными методами. Полученные результаты показывают применимость метода для качественных и количественных оценок исследуемых переходных и установившихся колебаний динамических систем, находящихся в условиях периодического внешнего воздействия.

Исследование виброзащитной системы

Рассматривается математическая модель виброзащитной системы с нелинейными амортизаторами и демпферами в условиях внешнего периодического возмущения [6]. Виброзащитная система состоит из прибора массой m_1 (объект виброзащиты), установленного на платформу массой m_2, которая закреплена на вибрирующем основании. Предполагается, что упругие элементы системы имеют вид полинома третей степени $kx + lx^2 + px^3$, демпфирующие элементы имеют нелинейную кубическую характеристику $c\dot{x} + d\dot{x}^3$ (здесь x_1, x_2 – абсолютное перемещение прибора и платформы), а основание осуществляет вертикальные колебания согласно уравнениям $f(t) = a(1 + b\cos(\omega t) + \varepsilon\sin^3(\omega t))$.

Рассматривается относительное перемещение прибора и платформы: $y_1 = x_1 - f, y_2 = x_2 - f$. Уравнения движения в относительных координатах имеют вид [7]

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + d_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^3 + k_1(y_1 - y_2) + l_1(y_1 - y_2)^2 + p_1(y_1 - y_2)^3 = -m_1\ddot{f};$$

$$m_2\ddot{y}_2 + c_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + d_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^3 + k_1(y_2 - y_1) - l_1(y_2 - y_1)^2 + p_1(y_2 - y_1)^3 + c_2\dot{y}_2 + d_2\dot{y}_2^3 + k_2y_2 + l_2y_2^2 + p_2y_2^3 = -m_2\ddot{f}; \quad (1)$$

$$\ddot{f}(t) = a\omega^2(-b\cos(\omega t) + 6\varepsilon\sin(\omega t)\cos^2(\omega t) - 3\varepsilon\sin^3(\omega t)).$$

Вводятся дополнительные комплексно-сопряженные переменные [8]:

$q_0 = \exp(i\omega t), \overline{q}_0 = \exp(-i\omega t), \lambda_1 = i\omega$.

Система дифференциальных уравнений (1) записывается в матричной форме:

$\dot{X} = PX + R$.

С помощью линейного преобразования $Y = DX$ система шестого порядка приводится к виду

$\dot{Y} = \Lambda Y + R$

с диагональной матрицей. Выполняется многочленное преобразование

$$y_S = z_S + \sum_{|v|=2}^{4} a_v^S Z^v, (s = 3,4,5,6),$$

результатом которого является система

$$\dot{z}_S = \lambda z_S + \sum_{|v|=2}^{4} q_v^S Z^v, (s = 3,4,5,6).$$

Дополнительные комплексно-сопряженные переменные не преобразовываются: $y_S = z_S, (s = 1,2)$. Особые значения индекса при фиксированном S находятся из двух уравнений:

$$\lambda_1 v_1 + \overline{\lambda}_1 v_2 + \lambda_2 v_3 + \overline{\lambda}_2 v_4 + \lambda_3 v_5 + \overline{\lambda}_3 v_6 - \lambda_S = 0,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 2,3,4, s = 2,3.$$

В нерезонансном случае, когда собственные частоты колебаний системы и частота вибрации не совпадают и не кратны, находим следующие особые индексы:

при $q_v^3 : v = (0,0,1,0,1,1), v = (0,0,2,1,0,0), v = (1,1,1,0,0,0)$,

при $q_v^4 : v = (0,0,0,1,1,1), v = (0,0,1,2,0,0), v = (1,1,0,1,0,0)$,

при $q_v^5 : v = (0,0,1,1,1,0), v = (0,0,0,0,2,1), v = (1,1,0,0,1,0)$,

при $q_v^6 : v = (0,0,1,1,0,1), v = (0,0,0,0,1,2), v = (1,1,0,0,0,1)$.

Постоянные q_v^S приравнивают нулю при неособых значениях индексов; при таких значениях вычисляют постоянные a_v^S и, наоборот, при особых значениях индексов считают коэффициенты a_v^S равными нулю и вычисляют q_v^S. Методом многочленных преобразований в нерезонансном случае получена автономная система, определяемая шестью параметрами:

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= (\lambda_2 + q_{111000}^3) z_3 + q_{001011}^3 z_3 z_5 \overline{z}_5 + q_{002100}^3 z_3^2 \overline{z}_3 \\ \dot{z}_5 &= (\lambda_3 + q_{110010}^5) z_3 + q_{001110}^5 z_3 \overline{z}_5 z_5 + q_{000021}^5 z_5^2 \overline{z}_5\end{aligned} \quad (2)$$

Автономная система содержит шесть существенных параметров, исходная определяется 23 параметрами. Стационарные режимы колебания находятся путем приравнивания правых частей системы к нулю.

Установившийся режим колебаний виброзащитной системы является полигармоническим. Колебания системы происходят с частотой внешней силы. Перейдем к новым комплексно-сопряженным переменным:

$z_{3,4} \equiv \rho_1 \exp(\pm i\theta_1), z_{5,6} \equiv \rho_2 \exp(\pm i\theta_2)$.

Преобразованная автономная система (2) в новых переменных записывается в виде

$$\dot{\rho}_1 = \rho_1 \operatorname{Re}(\lambda_2 + q_{111000}^3) + \rho_1 \rho_2^2 \operatorname{Re} q_{001011}^3 + \rho_1^3 \operatorname{Re} q_{002100}^3,$$

$$\dot{\theta}_1 = \operatorname{Im}(\lambda_2 + q_{111000}^3) + \rho_2^2 \operatorname{Im} q_{001011}^3 + \rho_1^2 \operatorname{Im} q_{002100}^3,$$

$$\dot{\rho}_2 = \rho_2 \operatorname{Re}(\lambda_3 + q_{110010}^5) + \rho_2 \rho_1^2 \operatorname{Re} q_{001110}^5 + \rho_2^3 \operatorname{Re} q_{000021}^5,$$

$$\dot{\theta}_2 = \operatorname{Im}(\lambda_3 + q_{110010}^5) + \rho_1^2 \operatorname{Im} q_{001110}^5 + \rho_2^2 \operatorname{Im} q_{000021}^5$$

В результате применения метода многочленных преобразований с заданной точностью получена преобразованная автономная система. Преобразованная система содержит существенно меньшее количество ненулевых коэффициентов, чем исходная, что упрощает ее исследование. С помощью разработанных программ найдены существенные константы, получены числовые оценки переходных и установившихся режимов колебаний.

Заключение

Рассматриваемая математическая модель нелинейных виброзащитных динамических систем представляет собой систему дифференциальных уравнений, содержащую нелинейные характеристики полиномиальной структуры с периодическими параметрами [9]. Исследование динамических систем проводится методом многочленных преобразований, находятся существенные параметры нелинейной динамической системы, определяющие качество установившихся и переходных процессов.

Нелинейные части исследуемой системы представлены в форме многочлена до четвертой степени относительно фазовых переменных с периодическими коэффициентами [10]. Разработан алгоритм метода, удобный для программирования, и составлен пакет программ для реализации метода. Программы применимы для исследования установившихся и переходных режимов колебаний нелинейных виброзащитных систем с двумя степенями свободы в условиях внешнего периодического возмущения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-08-01046-а

Литература

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. – 394 с.
2. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах / Под ред. К.В. Фролова. – М.: Маш., 1995. – 456 с.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
4. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. – Л: Маш., 1975. – 198 с.
5. Бутенин Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний. – М.: Маш., 1991. – 344 с.
6. Гончаревич И.Ф., Фролов К.В. Теория вибрационной техники и технологии. – М.: Наука, 1981. – 318 с.
7. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 308 с.
8. Иванов С.Е. О реализации численно-аналитического метода многочленных преобразований на компьютере. // Современные технологии: Труды молодых ученых ИТМО / Под ред. проф. С.А. Козлова. – СПб: СПб ГИТМО(ТУ), 2001. – С. 138–141.
9. Мельников В.Г., Мельников Г.И., Иванов С.Е. Компьютерные технологии в механике приборных систем. Учебное пособие / Под ред. В.Г. Мельникова. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2006. – 127 с.
10. Фролов К.В. Нелинейные задачи динамики машин. – М.: Маш., 1992. – 376 с.

Иванов Сергей Евгеньевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат физ.-мат. наук, доцент, SIvanov@mail.ifmo.ru