3 АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ И УСТРОЙСТВА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 62.50

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗИРУЕМОСТИ МНОГОАГРЕГАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Н.А. Дударенко, М.В. Полякова, А.В. Ушаков

Рассматриваются проблемы алгебраической организации условий обобщенной синхронизируемости многоагрегатных динамических объектов, которые формируются на основе геометрической постановки задачи синхронного движения агрегатов как движения в линейной оболочке, натянутой на задающий вектор.
Ключевые слова: алгебраическая организация, многоагрегатные объекты, обобщенное синхронное движение, собственный вектор, линейная оболочка.

Введение

В современных технологических процессах по обработке материальных и обслуживанию гуманитарных потоков можно выделить задачи, в которых многоагрегатные компоненты технологических ресурсов участвуют в формировании совокупного финального продукта (результата), функционируя как «единое целое». Характерными примерами [1] таких технологических процессов по обработке материальных потоков являются процессы формирования и подачи ленточного материала в листопрокатном производстве, в производстве бумаги и тканей, в организации заготовительных процессов в составе «бесскладовых» технологических производств, процессы согласованного движения автономных больших полноповоротных радиотелескопов в составе радиоинтерферометра типа «Квазар» и т.д. Примерами технологических процессов по обслуживанию гуманитарных потоков являются процессы движения строем подвижных технических средств, управляемых антропокомпонентами-операторами, в виде колонны автомобилей, строя самолетов и вертолетов, и т.п., и автономных антропокомпонентов в виде строя военнослужащих на марше, в забеге и т.п.

Основным требованием к системам управления, встраиваемых в техническую среду отмеченных выше технологических процессов, является обеспечение синхронности функционирования динамических агрегатов в составе многоагрегатного процесса. Причем условие обеспечения синхронного функционирования агрегатов системно не должно быть доминирующим, чтобы не накладывались сильные ограничения на возможность назначения динамики технологического процесса с желаемыми показателями.

Исследования показали, что при геометрической постановке задачи управления многоагрегатными комплексами, доставляющего им синхронное функционирование, она обнаруживает несколько алгебраических формулировок. Так, в первой формулировке в рамках системной парадигмы вырождения сложных динамических систем [2, 3] условие синхронного функционирования агрегатов технологических ресурсов можно трактовать как вырождение многоагрегатной системы, при котором эллипсоид отношения «вход–выход» системы вырождается в отрезок прямой. В рамках второй формулировки задача сводится к алгебраическому требованию обеспечения определенной структуры собственных векторов линейного оператора динамической системы «многомерный вход – многомерный выход» (МВМВ) [2], при которой один из собственных векторов принадлежит линейной оболочке обобщенного синхронного функционирования.

Сравнивая две возможные алгебраические формулировки задачи синхронного функционирования агрегатов по степени развитости алгоритмического обеспечения процедур синтеза законов управления агрегатами, приходится отдать предпочтение второй формулировке. Она имеет развитое алгоритмическое обеспечение, базирующееся на возможностях обобщенного модального управления [4], позволяющего доставлять матрице состояния многоагрегатной системы требуемые собственные значения и собственные векторы. Результаты, полученные в статье, базируются на этом алгебраическом подходе.

Завершая введение в проблему, следует сказать, что попытки решить задачу обеспечения синхронного функционирования многоагрегатных объектов МВМВ-типа были предприняты в работах [5–8]. Они опирались на возможности алгебраических свойств линейного оператора, представленного передаточной матрицей МВМВ-типа. Использование для этих целей векторно-матричных представлений метода пространства состояний существенно расширило возможности решения поставленной задачи.

Постановка задачи

Постановка задачи синтеза управления многоагрегатным техническим объектом (ТО) МВМВ-типа, доставляющего процессам в ТО по выходу синхронное функционирование, формулируется на основе использования векторно-матричного модельного представления этих процессов в форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где u, x, y – соответственно векторы управления, состояния и выхода ТО; $u, y \in R^m$, $x \in R^n$; A, B, C – соответственно матрицы состояния, управления и выхода, согласованные по размерности с переменными объекта.

Сформулируем геометрическую трактовку задачи обеспечения синхронного функционирования агрегатов многоканального технического объекта (1).

Геометрическая постановка задачи синхронного изменения компонентов $y_l(l = \overline{1,m})$ m-мерного вектора выхода y в линейной по времени и покоординатно объекта (1) под действием m-мерного вектора задающего воздействия $g(t)$ имеет вид

$$y(t) \in L_c\{g_0\} \text{ для } \forall t; \tag{2}$$

где $L_c\{g_0\}$ – линейная оболочка, натянутая на вектор g_0, порождающий задающий вектор $g(t)$, параметризованный временем t и обладающий свойством вида (2)

$$g(t) \in L_c\{g_0\} \text{ для } \forall t. \tag{3}$$

Требуемая динамика синхронного движения компонентов вектора $y(t)$, заданного в форме (2), будет определяться динамикой изменения задающего воздействия $g(t)$ в линейной оболочке, натянутой на g_0, задаваемой в форме

$$g(t) = \psi(t) g_0 \tag{4}$$

где $\psi(t)$ – скалярная функция, задающая динамику желаемого развития процессов в ТО (1), удовлетворяющих условию (2).

Введем два определения.

Определение 1. Будем называть задачу синхронизации задачей синхронизации в общепринятом смысле, если все компоненты вектора g_0 равны друг другу. □

В этом случае значения скоростей и ускорений изменения всех компонентов, подчиненных условию (4), оказываются равными друг другу.

Определение 2. Будем называть задачу синхронизации обобщенной задачей синхронизации, если компоненты вектора g_0 произвольны. □

В этом случае значения скоростей и ускорений изменения всех компонентов, подчиненных условию (4), могут отличаться друг от друга.

Для раскрытия в полной мере алгебраических возможностей матричных компонентов векторно-матричного описания объекта (1) и формируемой системы управления, которая строится на агрегировании ТО (1) и формирователя сигнала управления (ФСУ) этим объектом, необходимо направить усилия на анализ алгебраических свойств матричных функций от матриц. Решение задачи синтеза ФСУ будем искать в классе аналитических представлений сигнала управления $u(t)$ в форме

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \tag{5}$$

где K_g, K – соответственно матрицы прямой связи по задающему воздействию и отрицательной обратной связи по вектору состояния ТО (1). При построении ФСУ в форме (5) использована априорная гипотеза о полной измеримости вектора задающего воздействия $g(t)$ и вектора состояния ТО $x(t)$. Агрегирование модели ТО (1) и алгоритма функционирования ФСУ в форме (5) образует систему управления:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t);\ x(0),\ y(t) = Cx(t), \tag{6}$$

где $F = A - BK$, $G = BK_g$.

Для анализа алгебраических свойств матричных функций от матриц целесообразно перейти к описаниям полученных выше векторно-матричных представлений с использованием лапласовых образов их переменных. В этой связи применение преобразования Лапласа к (4) дает

$$g(s) = \psi(s) g_0. \tag{7}$$

В свою очередь, переход в (6) к лапласовым образам позволяет записать:

$$y(s) = C(sI - F)^{-1} x(0) + C(sI - F)^{-1} Gg(s)|_{x(0)=0} = C(sI - F)^{-1} Gg(s);\ x(0) = x(t)|_{t=0}. \tag{8}$$

Подстановка в (8) условия (7) дает

$$y(s) = C(sI - F)^{-1} Gg(s)|_{g(s)=\psi(s)g_0} = C(sI - F)^{-1} G\psi(s) g_0, \tag{9}$$

где $y(s), g(s)$ – лапласовы образы вектора выхода и вектора задающего входного воздействия; $\psi(t)$, $\psi(s)$ – скалярная функция соответственно времени t и комплексной переменной s, задающая динамику желаемого развития процессов в ТО (1).

Основной результат. Поиск достаточных алгебраических условий обобщенной синхронизируемости многоканальных динамических объектов

Решение задачи конструирования матриц K_g и K в алгоритме (5) формирования сигнала управления, опирающейся на алгебраические свойства матричных компонентов соотношения (9), использует гипотезу о том, что выбором матриц K_g и K выражение (9) можно свести к представлениям вида

$$y(s) = C(sI - F)^{-1} G\psi(s) g_0 = C(sI - F)^{-1} BK_g \psi(s) g_0 = \zeta(s) g_0, \tag{10}$$

где $\zeta(s)$ – скалярная функция, имеющая вещественнозначное обратное преобразование Лапласа, определяющая динамику изменения вектора выхода ТО (1) в линейной оболочке $L_c\{g_0\}$, тем самым доставляет системе вида (6) обобщенное синхронное изменение компонентов вектора выхода $y(t)$ в форме (3).

Решение этой задачи содержится в следующих утверждениях.

Утверждение 1 (У1). Чтобы $y(t) \in L_c\{g_0\}$ или чтобы выполнялось соотношение $y(s) = \zeta(s) g_0$, где $\zeta(s)$ – скалярная функция переменной s, имеющая вещественнозначное обратное преобразование Лапласа, достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. вектор $BK_g g_0$ был бы правым собственным вектором матрицы состояния F, т.е. выполнялось соотношение

$$F(BK_g g_0) = \lambda_i (BK_g g_0), \quad (11)$$

где $\lambda_i (i = \overline{1,n})$ – одно из вещественных собственных значений матрицы F;

2. вектор g_0 был бы правым собственным вектором матрицы CBK_g, т.е. выполнялось равенство

$$(CBK_g) g_0 = \lambda_{gl} g_0, \quad (12)$$

где $\lambda_{gl} (l = \overline{1,m})$ – одно из вещественных собственных значений матрицы CBK_g, так что матрица прямой связи K_g ищется из условия

$$K_g = arg\left\{(CBK_g) g_0 = \lambda_{gl} g_0\right\}. \quad \square\ (13)$$

Доказательство. Рассмотрим векторно-матричное выражение

$$y(s) = C(sI - F)^{-1} G\psi(s) g_0 = C(sI - F)^{-1} BK_g g_0 \psi(s).$$

По свойству [8] матричной функции $f(F)$ сохранять геометрический спектр исходной матрицы F $F\xi_i = \lambda_i \xi_i$, где $\lambda_i : \det(\lambda I - F) = 0$, в форме

$$f(F)\xi_i = f(\lambda_i)\xi_i, \quad (14)$$

(11) и (14) позволяют для матричной функции от матрицы $f(F) = (sI - F)^{-1}$ записать цепочку соотношений

$$(sI - F)^{-1} BK_g g_0 = (s - \lambda_i)^{-1} BK_g g_0. \quad (15)$$

Подстановка (15) во второе представление выражения (10) дает

$$y(s) = CBK_g g_0 \psi(s)(s - \lambda_i)^{-1}. \quad (16)$$

Если в (16) учесть (12), то получим:

$$y(s) = \lambda_{gl} \psi(s)(s - \lambda_i)^{-1} g_0 = \zeta(s) g_0, \ \zeta(s) = \lambda_{gl} \psi(s)(s - \lambda_i)^{-1}. \quad \blacksquare(17)$$

Заметим, что собственные числа λ_i выбираются из требований к динамике развития процессов по выходу в подпространстве $L_c\{g_0\}$. Альтернативой полученному результату являются положения следующего утверждения.

Утверждение 2(У2). Чтобы $y(t) \in L_c\{g_0\}$ или чтобы выполнялось соотношение $y(s) = \zeta(s) g_0$, где $\zeta(s)$ – скалярная функция переменной s, имеющая вещественнозначное обратное преобразование Лапласа, достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. вектор $BK_g g_0$ удовлетворял соотношению (11), а, следовательно, и (15);
2. матрица CBK_g была бы единичной, т.е. применительно к матрице K_g выполнялось соотношение

$$K_g = arg\left\{CBK_g = I\right\}. \quad \square(18)$$

Доказательство. На основании подстановки (15) в (10) получим выражение (16). Если в (16) учесть (18), то получим

$$y(s) = g_0(s-\lambda_i)^{-1}\psi(s) = (s-\lambda_i)^{-1}\psi(s)g_0 = \zeta(s)g_0,$$

где $\zeta(s) = (s-\lambda_i)^{-1}\psi(s)$. ■(19)

Таким образом, если задачу понимать расширительно, то матрицы C и B при конструирования объекта управления и матрица K_g при синтезе закона управления должны формироваться из условия

$$\left(C, B, K_g\right) = arg\left\{CBK_g = I\right\}. \quad (20)$$

Как и в случае утверждения 1, собственные числа λ_i выбираются из требований динамики развития процессов в подпространстве $L_c\{g_0\}$.

Утверждение 3(У3). Матрица M, приводящая произвольную $n\times n$-квадратную матрицу F простой структуры к диагональной форме $\Lambda = diag\left[\lambda_i, i=\overline{1,n}\right]$ в силу соотношения

$$\Lambda = M^{-1}FM, \quad (21)$$

имеет своими столбцами [8] собственные векторы матрицы F. □

Доказательство. Запишем базовое уравнение матричного подобия для рассматриваемого случая,

$$M\Lambda = FM, \quad (22)$$

в столбцовой форме

$$M\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2 & \dots & \Lambda_i & \dots & \Lambda_n\end{bmatrix} = F\begin{bmatrix}M_1 & M_2 & \dots & M_i & \dots & M_n\end{bmatrix}, \quad (23)$$

где Λ_i, M_i – i-ые столбцы соответственно матриц Λ и M $(i=\overline{1,n})$. Перейдем теперь от матричного уравнения (22) к n векторно-матричным уравнениям вида

$$M\Lambda_i = FM_i;\ i=\overline{1,n}, \quad (24)$$

где i-ый столбец Λ_i диагональной матрицы Λ имеет представление

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & \lambda_i & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T. \quad (25)$$

Легко видеть, что с учетом (25) векторно-матричное уравнение (24) принимает вид

$$\lambda_i M_i = FM_i;\ i=\overline{1,n}. \quad (26)$$

Векторно-матричное соотношение (26) является определением собственного вектора матрицы F, откуда следует, что M_i – собственный вектор матрицы F. ■

Положения утверждений У1–У3, дополненные концепцией обобщенного модального управления [9], являются алгоритмической основой для синтеза управления и доставляют системе МВМВ-типа достаточные алгебраические условия обобщенной синхронизируемости многоканальных динамических объектов.

Приведем алгоритмы конструирования матричных компонентов закона управления, присвоив им номера 1 и 2, а также сопроводим их аббревиатурой А1 и А2 соответственно.

Алгоритм 1 (А1) конструирования матричных компонентов закона управления (5), опирающийся на положения утверждения 1.

1. Задать g_0, определяющий $L_c\{g_0\}$– линейную оболочку, натянутую на вектор g_0, единичной размерности, которой в процессе функционирования ОУ должен принадлежать вектор выхода $y(t)$.

2. Сформировать требования к показателям качества в переходном и установившемся режимах процессов, протекающих в подпространстве $L_c\{g_0\}$.

3. Сформировать векторно-матричное представление технического объекта в форме (1).

4. Задать λ_{gl} и решить уравнение $K_g = arg\left\{CBK_g = \lambda_{gl} I\right\}$;

5. Сформировать собственный вектор матрицы F $\xi_i = BK_g g_0$;

6. Сформировать модальную модель с матрицами Λ, H, образующих наблюдаемую пару, где диагональная матрица Λ является носителем желаемого спектра собственных значений матрицы F состояния проектируемой системы, в состав которого входит собственное значение λ_i, удовлетворяющее требованию

$$\lambda_i = arg\left\{ \left(\lambda_i I - A\right)\xi_i \in JmB\right\}, \tag{27}$$

где JmB – образ матрицы B, т.е. пространство ее столбцов;

7. Записать матричное уравнение Сильвестра $M\Lambda - AM = -BH$ в декомпозированной форме

$$\left[\tilde{M} \vdots \bar{M}\right]\begin{bmatrix}\tilde{\Lambda} & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda}\end{bmatrix} - A\left[\tilde{M} \vdots \bar{M}\right] = -B\left[\tilde{H} \vdots \bar{H}\right], \tag{28}$$

где в силу утверждения 3 $\tilde{M} = \xi_i, \tilde{\Lambda} = \lambda_i :\ F\xi_i = \lambda_i \xi_i$.

8. Выделить из системы (28) матричное уравнение Сильвестра,

$$\left(\lambda_i I - A\right)\xi_i = -B\tilde{H} \tag{29}$$

и найти его решение относительно матрицы $\tilde{H}$, которое в случае $rangB = m = n = \dim x$ принимает вид $\tilde{H} = B^{-1}(A - \lambda_i I)\xi_i$, а в случае $rangB = m < n$ находится из соотношения $\tilde{H} = (B^T B)^{-1} B^T (A - \lambda_i I)\xi_i$.

9. Выделить из системы (28) матричное уравнение Сильвестра

$$\bar{M}\bar{\Lambda} - A\bar{M} = -B\bar{H}, \tag{30}$$

в котором $(\bar{\Lambda}, \bar{H})$ – наблюдаемая пара, $\bar{\Lambda} = diag\left\{\lambda_j : j \neq i; j = \overline{1,n}\right\}$, и решить уравнение (30) при известных $\bar{\Lambda}$, A, B и $\bar{H}$ относительно матрицы $\bar{M}$.

10. Сформировать матрицы $M = \left[\tilde{M} \vdots \bar{M}\right]$ и $H = \left[\tilde{H} \vdots \bar{H}\right]$, при этом обеспечить максимальную близость собственных векторов матрицы F $\xi_j = M_j (j \neq i)$ для обеспечения модальной робастности системы к ортогональности с учетом возможной минимизации затрат на управление.

11. Вычислить матрицу K обратных связей с помощью соотношения

$$K = HM^{-1} = \left[\tilde{H} \vdots \bar{H}\right]\left[\tilde{M} \vdots \bar{M}\right]^{-1}. \tag{31}$$

12. Построить реализационную версию закона управления в форме

$$\begin{aligned} u(t) &= K_g g(t) - Kx(t) = K_g g(t) - K_y y(t) - K_x x(t)\,|_{K_y = K_g} = \\ &= K_g\left(g(t) - y(t)\right) - K_x x(t) = K_g \varepsilon(t) - K_x x(t)\,|_{K_g = K_\varepsilon} = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t) \end{aligned} \tag{32}$$

где $K_x = K - K_g C$.

Алгоритм 2(А2) конструирования матричных компонентов закона управления (5), опирающийся на положения утверждения 2

1. Выполнить пп.1–3 алгоритма 1.

2. Выполнить п. 4 алгоритма 1 при условии выполнения равенства $\lambda_{gl} = 1$;

3. Выполнить пп. 5–11 алгоритма 1.

Заключение

Основным результатом работы являются алгоритмы конструирования матричных компонентов закона управления, позволяющего обеспечить обобщенную синхронность функционирования динамических агрегатов, входящих в состав технологического процесса. Однако следует отметить, что при решении поставленной задачи использован только один собственный вектор матрицы отношения «вход–выход». Свобода назначения остальных $(m-1)$ векторов ожидает своего системного использования. Предстоит разработать критерии их назначения и адаптировать разработанную алгоритмическую базу под эту задачу.

Литература

1. Мирошник И.В. Согласованное управление многоканальными системами. – Л.: Энергоатомитздат, 1990.
2. Бочков А.Л., Дударенко Н. А., Ушаков А.В. Синтез многомерных функционально вырожденных динамических систем // Известия вузов. Приборостроение. – 2008. – Т. 51. – № 1. – С. 25–29.
3. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Вырождение сложных динамических систем с равнотемповыми структурными компонентами // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2005. – № 19. – С. 44–51.
4. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление // Известия вузов. Приборостроение. – 2000. – Т. 43. – № 3. – С. 8–16.
5. Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. К вопросу о синтезе перекрестных связей, обеспечивающих синхронную работу параллельно включенных агрегатов // Приборы и системы автоматики. Труды ЛИТМО, вып. 85. – Л.: ЛИТМО, 1975.
6. Мирошник И.В., Ушаков А.В. Синтез алгоритма синхронного управления системой квазиоднотипных объектов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 11.
7. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2002.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973.
9. Власенко В.А., Мирошник И.В., Сабинин Ю.А., Ушаков А.В. и др. Система управления лентопротяжным механизмом // Электротехн. пром. Серия «Электропривод». – 1977. – Вып. 5 (58).

Дударенко Наталия Александровна – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, Dudarenko@yandex.ru

Полякова Майя Вячеславовна – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, 12noch@mail.ru

Ушаков Анатолий Владимирович – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, Ushakov-AVG@yandex.ru