# КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 681.51.015

## КАСКАДНАЯ РЕДУКЦИЯ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ

С.В. Арановский, А.А. Бобцов, А.А. Пыркин

Рассматривается задача идентификации неполного набора неизвестных параметров линейной регрессионной модели. Предложена процедура редукции, позволяющая свести исходную модель к редуцированной, содержащей меньшее число неизвестных параметров. Проанализированы условия существования редуцированной модели, сводящиеся к линейной независимости входных сигналов.

**Ключевые слова:** линейная регрессионная модель, редукция, идентификация.

Как в теории идентификации, так и при решении задач адаптивного управления важнейшую роль играет линейная регрессионная модель, описываемая выражением [1]

$$y(t)=\theta_1\omega_1(t)+\theta_2\omega_2(t)+\ldots+\theta_n\omega_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\theta_k\omega_k(t)\,, \qquad (1)$$

где $y(t)$ – измеряемый выходной сигнал; $\omega_i(t)$ – измеряемые сигналы (регрессоры); $\theta_i$ – неизвестные параметры; $i=1,...,n$. Такая модель часто используется в явном виде при описании линейных статических процессов или линейных дискретных систем, может быть получена для непрерывных систем путем введения фильтра состояний, применяется для описания некоторых нелинейных систем с известными нелинейностями или же может входить как подсистема в более сложные модели [1]. Также в работах [2–4] приведен пример использования такой модели для идентификации параметров гармонического сигнала и компенсации соответствующих возмущений.

Как правило, ставятся задачи идентификации неизвестных параметров по набору измерений, оценивания параметров в реальном времени при использовании адаптивного управления или компенсации возмущений. Существует большое число подходов, решающих эти задачи, наиболее известным среди которых является метод наименьших квадратов и различные его модификации [1]. Для оценки в реальном времени могут использоваться итеративные формы метода наименьших квадратов или градиентные интегральные алгоритмы. К преимуществам последних относятся меньшая вычислительная сложность и возможность варьировать скорость сходимости оценок. Указанные подходы обладают общим недостатком – оценка всех параметров модели (1) происходит одновременно, что отрицательно сказывается на времени оценивания. В то же время, в ряде задач полная идентификация модели (1) не требуется. Например, при диагностике отказов оборудования нет необходимости оценивать все *n* неизвестных параметров, достаточно оценить только один контрольный параметр $\theta_k$. Для решения задачи идентификации одного параметра $\theta_k$ предложена итеративная процедура каскадной редукции модели (1).

Рассмотрим для краткости и удобства изложения модель (1) при $n=3$ и опустим в выражениях аргумент *t*:

$$y=\theta_1\omega_1+\theta_2\omega_2+\theta_3\omega_3\,. \qquad (2)$$

Поставим задачу редуцировать систему (2) до одного неизвестного параметра $\theta_3$. Сначала умножим (2) на $\omega_2$ и проинтегрируем по времени на интервале от $t_0$ до $t$:

$$\int_{t_0}^{t} y\omega_2 dt=\theta_1\int_{t_0}^{t}\omega_1\omega_2 dt+\theta_2\int_{t_0}^{t}\omega_2^2 dt+\theta_3\int_{t_0}^{t}\omega_3\omega_2 dt\,.$$

Введем обозначения $\varphi_y=\int_{t_0}^{t} y\omega_2 dt$, $\varphi_1=\int_{t_0}^{t}\omega_1\omega_2 dt$, $\varphi_2=\int_{t_0}^{t}\omega_2^2 dt$, $\varphi_3=\int_{t_0}^{t}\omega_3\omega_2 dt$. Тогда

$$\varphi_y\varphi_2^{-1}=\theta_1\varphi_1\varphi_2^{-1}+\theta_2+\theta_3\varphi_3\varphi_2^{-1}\,.$$

Продифференцировав по времени, получим

$$\dot\varphi_y\varphi_2^{-1}-\varphi_y\varphi_2^{-2}\dot\varphi_2=\theta_1\left(\dot\varphi_1\varphi_2^{-1}-\varphi_1\varphi_2^{-2}\dot\varphi_2\right)+\theta_3\left(\dot\varphi_3\varphi_2^{-1}-\varphi_3\varphi_2^{-2}\dot\varphi_2\right). \qquad (3)$$

Модель (3) является редуцированной формой модели (2), из которой исключен параметр $\theta_2$. Отметим, что $\varphi_2>0$ для $\forall t\ge t_0$ при $\omega_2(t_0)\ne 0$, причем последнее достигается путем выбора $t_0$. Ситуация, при которой подходящего $t_0$ не существует, т.е. $\omega_2\equiv 0$, интереса не представляет, так как является вырожденной, и идентификация системы (2) невозможна (при этом система может быть редуцирована отбрасыванием нулевого члена). Модель (3) позволяет осуществить дальнейшую редукцию тогда и только тогда, когда выражение $\dot\varphi_{\sim}\varphi_2^{-1}-\varphi_{\sim}\varphi_2^{-2}\dot\varphi_2$ не обращается тождественно в ноль, где под $\varphi_{\sim}$ понимается любая функция из $\varphi_y, \varphi_1, \varphi_3$. Заметим, что это условие выполняется, если $\varphi_\sim$ не может быть линейно выражена через $\varphi_2$, т.е. не существует такого $k = \mathrm{const}$, что $\varphi_\sim \equiv k\varphi_2$. Несложно показать, что если это условие нарушается, то система (2) вырождается и не может быть однозначно идентифицирована (исключением является случай $n = 1$, который не представляет интереса с точки зрения поставленной задачи).

Продолжим редукцию модели (3). Чтобы исключить процедуру деления, умножим правую и левую части (3) на $\varphi_2^2$:

$$\dot{\varphi}_y\varphi_2 - \varphi_y\dot{\varphi}_2 = \theta_1\left(\dot{\varphi}_1\varphi_2 - \varphi_1\dot{\varphi}_2\right) + \theta_3\left(\dot{\varphi}_3\varphi_2 - \varphi_3\dot{\varphi}_2\right). \quad (4)$$

Введем новые переменные $\gamma_y = \dot{\varphi}_y\varphi_2 - \varphi_y\dot{\varphi}_2$, $\gamma_1 = \dot{\varphi}_1\varphi_2 - \varphi_1\dot{\varphi}_2$, $\gamma_3 = \dot{\varphi}_3\varphi_2 - \varphi_3\dot{\varphi}_2$, умножим модель (4) на $\gamma_1$ и проинтегрируем по времени на интервале от $t_0$ до $t$:

$$\int_{t_0}^{t}\gamma_y\gamma_1 dt = \theta_1\int_{t_0}^{t}\gamma_1^2 dt + \theta_3\int_{t_0}^{t}\gamma_3\gamma_1 dt .$$

Тогда, введя по аналогии выражения $\xi_y = \int_{t_0}^{t}\gamma_y\gamma_1 dt$, $\xi_1 = \int_{t_0}^{t}\gamma_1^2 dt$, $\xi_3 = \int_{t_0}^{t}\gamma_3\gamma_1 dt$, получим

$$\xi_y\xi_1^{-1} = \theta_1 + \theta_3\xi_3\xi_1^{-1}.$$

Продифференцировав по времени, получаем

$$\dot{\xi}_y\xi_1^{-1} - \xi_y\xi_1^{-2}\dot{\xi}_1 = \theta_3\left(\dot{\xi}_3\xi_1^{-1} - \xi_3\xi_1^{-2}\dot{\xi}_1\right). \quad (5)$$

Модель (5) является редуцированной формой модели (2), в которой остался только один неизвестный параметр $\theta_3$, а выходной сигнал и регрессор известны. Соответственно параметр $\theta_3$ может быть идентифицирован любым из описанных выше способов. Как и ранее, в выражении (5) можно исключить процедуру деления, умножив его на $\xi_1^2$. Таким образом, итеративная процедура каскадной редукции позволяет выделить из исходной модели (1) только те неизвестные параметры, которые требуется идентифицировать. Во избежание достижения интегралами больших величин интегрирование может проводиться на не интервале от $t_0$ до $t$, а на некотором интервале от $t - T$ до $t$, $t \ge T$, образующем временное окно. Это позволит также отслеживать вариации идентифицируемого параметра, но пока оставляет открытым вопрос выбора ширины окна *T*.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт № 16.740.11.0553).

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
2. Арановский С.В., Бобцов А.А., Никифоров В.О. Синтез наблюдателя для нелинейного объекта в условиях гармонического возмущения, приложенного к выходной переменной // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 3 (67). – С. 32–39.
3. Aranovskiy S., Bobtsov A., Kremlev A., Nikolaev N., Slita O. Identification of frequency of biased harmonic signal // European Journal of Control. – 2010. – № 2. – P. 129–139.
4. Бобцов А.А., Ефимов Д.В., Пыркин А.А., Золгадри А. Алгоритм адаптивного оценивания частоты смещенного синусоидального сигнала с аддитивной нерегулярной составляющей // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2012. – № 2. – С. 16–21.

***Арановский Станислав Владимирович*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, ст. научный сотрудник, s.aranovskiy@gmail.com

***Бобцов Алексей Алексеевич*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, декан, bobtsov@mail.ru

***Пыркин Антон Алексеевич*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, ассистент, a.pyrkin@gmail.com