УДК 681.51

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ СИНТЕЗА ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ[1]

С.Г. Чеботарев, А.С. Кремлев

Анализируются условия синтеза интервальных наблюдателей для линейных систем с неизвестными нестационарными параметрами. В англоязычной литературе этот класс систем получил наименование Linear Parameter-Varying Systems (LPV systems). Рассматриваются возможные варианты соблюдения свойств кооперативности системы, проводится анализ условий, при которых для данной комбинации свойств системы возможно построение интервального наблюдателя, позволяющего получить область оценок переменных состояния системы, гарантированно содержащую фактическое значение состояния в данный момент времени.

Ключевые слова: интервальные наблюдатели, кооперативность, мецлеровость, параметрическая неопределенность.

Введение

Проблема оценки неизмеряемого вектора состояния очень актуальна, и ее решение требуется во многих случаях [1–3]. В некоторых ситуациях, в связи с наличием неопределенности (параметрической и/или сигнальной), построение обычного наблюдателя, сходящегося в случае отсутствия шума к идеальному значению состояния, невозможно. Тем не менее, интервальная оценка остается возможной. Под интервальной оценкой здесь понимается работа интервального наблюдателя, который гарантирует оценивание множества допустимых значений для вектора состояний системы. Размер рассчитанного множества должен быть пропорционален неопределенности модели объекта. Неопределенности рассматриваются как детерминированные, но неизвестные функции времени. С этими ограничениями на параметры можно оценить границы ненаблюдаемых переменных: это так называемый «робастный» метод. Обычно интервальные наблюдатели генерируют два вектора оценок – минимальных и максимальных значений для каждого элемента вектора состояний объекта.

Есть несколько подходов к построению интервальных наблюдателей [4, 5–7]. В настоящей работе рассматриваются ситуация построения интервального наблюдателя, основанного на теории монотонных систем [4, 7]. Этот подход был расширен в работе [8] на случай нелинейных систем с использованием LPV-представления с известными минорной и мажорной матрицами, а в работе [9] – для наблюдаемых нелинейных систем. Одно из самых сложных допущений для построения интервального наблюдателя, связанное с кооперативностью динамики ошибки интервальной оценки, было решено в [9, 10]. Известно, что построение интервального наблюдателя возможно, если динамика ошибки оценки обладает свойствами кооперативности и устойчивости. Было показано, что при некоторых мягких условиях, применяя подобное преобразование координат, гурвицеву матрицу можно преобразовать в гурвицеву и мецлерову матрицу (кооперативную матрицу). Матрица преобразования – это решение уравнения Сильвестра, и конструктивный порядок решения этого уравнения был приведен в [9].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение № 14.B37.21.1928).

Работа организована следующим образом. Некоторые основные факты из теории интервального оценивания приведены в разделе «Общие сведения». Анализ систем и условия построения интервального наблюдателя для различных комбинаций их свойств описаны в разделе «Основной результат».

Общие сведения

Для матрицы $\mathbf{A} \in R^{m\times n}$ определим $\overline{\mathbf{A}} = \max\{0, \mathbf{A}\}$, $\underline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$. Запись $\mathbf{A} \in M$ означает, что матрица $\mathbf{A}$ – мецлерова, т.е. имеет неотрицательные элементы вне главной диагонали.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{x} \in R^n$ будет вектором переменных, $\underline{\mathbf{x}} \le \mathbf{x} \le \overline{\mathbf{x}}$ для некоторых $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \subset R^n$, и $\mathbf{A} \in R^{m\times n}$ будет постоянной матрицей, тогда

$$\overline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} \le \mathbf{A}\mathbf{x} \le \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}.$$

Доказательство. Отметим, что $\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\overline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}}\right)\mathbf{x}$, что для $\underline{\mathbf{x}} \le \mathbf{x} \le \overline{\mathbf{x}}$ дает необходимые оценки.

Напомним, что матрица $\mathbf{A} \in R^{m\times n}$ называется гурвицевой, если все ее собственные значения имеют отрицательную вещественную часть. Любое решение линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \omega(t),\ \omega : R_+ \to R_+^n,$$

с $\mathbf{x} \in R^n$ и мецлеровой матрицей $\mathbf{A}$ поэлементно неотрицательно для всех $t \ge 0$ при условии, что $\mathbf{x}(0) \ge 0$ [11]. Такие динамические системы называются кооперативными (монотонными) [11].

Лемма 2. Даны матрицы $\mathbf{A} \in R^{m\times n}$, $\mathbf{R} \in R^{m\times n}$ и $\mathbf{C} \in R^{p\times n}$. Если существует матрица $\mathbf{L} \in R^{n\times p}$ такая, что матрицы $\mathbf{A}$–$\mathbf{LC}$ и $\mathbf{R}$ имеют одинаковые собственные значения, тогда $\mathbf{R}=\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{LC})\mathbf{S}$, где матрица $\mathbf{S} \in R^{n\times n}$ при условии, что пары ($\mathbf{A}$–$\mathbf{LC}$, $\mathbf{e}_1$) и ($\mathbf{R}$, $\mathbf{e}_2$) наблюдаемы для некоторых $\mathbf{e}_1 \in R^{1\times n}$, $\mathbf{e}_2 \in R^{1\times n}$. Этот результат был использован в [9] для построения интервальных наблюдателей для линейных стационарных систем с мецлеровой матрицей $\mathbf{R}$ (основная трудность состоит в доказательстве существования вещественной матрицы $\mathbf{S}$ и обеспечении конструктивного метода ее расчета).

Основной результат

Рассматривается следующий вид линейной системы, имеющей зависимость от неизвестных нестационарных параметров $\mathbf{p} \in \mathrm{P}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{p}, t)\mathbf{x} + d(t, y, u), \\ \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^p$ – это состояние, вход и выход системы (1) соответственно, $\mathbf{x} \in \mathrm{P} \in R^q$ – это вектор неизвестных сигналов или параметров. В настоящей работе рассматривается случай без шума в канале измерения, предлагаемый результат может быть расширен на случай с шумом, это расширение опущено для краткости изложения.

Допущение 1. Состояние $\mathbf{x}$ и вход $\mathbf{u}$ ограничены – стандартные допущения в теории оценивания.

Допущение 2. Если даны границы $\left[\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}\right]$ состояния $\mathbf{x}$, то значения функции $d(t, y, u)$ заключены в интервале $\left[\underline{d}(t, y, u), \overline{d}(t, y, u)\right]$.

Допущение 3. Существует коэффициент усиления наблюдателя $\mathbf{L}$, который обеспечивает устойчивость нестационарной матрицы динамики наблюдателя с матрицей $\mathbf{P}(t)$ функции Ляпунова V; это допущение определяет условия устойчивости динамики оценки:

$$V = \underline{\mathbf{e}}^T P(t)\underline{\mathbf{e}} + \overline{\mathbf{e}}^T P(t)\overline{\mathbf{e}}.$$

Множество работ по построению интервального наблюдателя [4, 7–9] посвящено случаю с постоянной матрицей $\mathbf{A}$ (или в результате некоторых преобразований ошибка оценки может быть представлена в форме с постоянной матрицей $\mathbf{A}$), и далее может быть найден такой коэффициент усиления наблюдателя $\mathbf{L}$, что $\mathbf{A}$–$\mathbf{LC}$ является гурвицевой и мецлеровой. В дальнейших работах [12] снимается предположение о том, что существует коэффициент усиления наблюдателя, который делает динамику ошибки оценки устойчивой и кооперативной. Коэффициент усиления наблюдателя должен, как обычно, обеспечить устойчивость ошибки наблюдения, а далее предлагается статическое преобразование координат, которое обеспечивает требуемое свойство кооперативности.

Рассмотриваемый метод построения интервального наблюдателя для линейных систем с переменными параметрами тесно связан с теорией дифференциальных неравенств и кооперативными системами. Основное условие построения подобного устройства оценки, работающего в условиях интервальности и неизвестного характера изменения параметров, от которых зависит система, связано с кооперативностью динамики ошибки интервальной оценки. Далее рассматриваются возможные варианты выполнения данного ограничения, на основе чего строится дальнейший анализ.

1. $(t) \geq 0$; $\mathbf{A}(\mathbf{p}, t) \in M$.
2. $\mathbf{x}(t) \geq 0$; $\mathbf{A}(\mathbf{p}, t) \notin M$; $\exists \mathrm{L}: (\mathbf{A}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{LC}) \in M$.
3. $\mathbf{x}(t) \geq 0$; $\mathbf{A}(\mathbf{p}, t) \notin M$; $\nexists \mathrm{L}: (\mathbf{A}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{LC}) \in M$; $\exists \mathbf{S}: \mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{LC})\,\mathbf{S} \in M$.
4. $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{A}(\mathbf{p}, t) \in M$; $\exists \mathbf{X}: \mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \mathbf{X} \geq 0$.
5. $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}(\mathbf{p},t) = \mathbf{A} \in M; \exists \Delta\mathbf{A} : -\Delta\mathbf{A}\overline{x} \leq d(t,\mathbf{x}) \leq \Delta\mathbf{A}\overline{x}$.
6. $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}(\mathbf{p},t) \notin M; \exists \mathbf{L} : \left(\mathbf{A}(\mathbf{p},t) - \mathbf{LC}\right) \in M; \exists \mathbf{X} : \mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \mathbf{X} \geq 0.$
7. $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}(\mathbf{p},t) = \mathbf{A} \notin M; \exists \mathbf{L} : \left(\mathbf{A}(\mathbf{p},t) - \mathbf{LC}\right) \in M; \exists \Delta\mathbf{A} : -\Delta\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \leq d(t,\mathbf{x}) \leq \Delta\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}$.
8. $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}(\mathbf{p},t) \notin M; \nexists \mathbf{L} : \left(\mathbf{A}(\mathbf{p},t) - \mathbf{LC}\right) \in M; \exists \mathbf{S} : \mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{A}(\mathbf{p},t) - \mathbf{LC}\right)\mathbf{S} \in M.$

   $\psi = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}; \exists \Phi : \psi^* = \psi - \Phi \geq 0.$
9. $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}(\mathbf{p},t) \notin M; \nexists \mathbf{L} : \left(\mathbf{A}(\mathbf{p},t) - \mathbf{LC}\right) \in M; \exists \mathbf{S} : \mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1}\left(\mathbf{A}(\mathbf{p},t) - \mathbf{LC}\right)\mathbf{S} \in M;$

$\mathbf{R} - const; \psi = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}; \exists\left(\overline{\mathbf{S}}^{-1} - \underline{\mathbf{S}}^{-1}\right)\Delta\mathbf{A}\left(\overline{\mathbf{S}} + \underline{\mathbf{S}}\right) = \Delta\mathbf{A}^* : -\Delta\mathbf{A}^*\overline{\psi} \leq d(t,\psi) \leq \Delta\mathbf{A}^*\overline{\psi}.$

Отдельно рассматривается ситуация, когда состояния системы неотрицательны (п.п. 1–3), и ситуация, когда состояния знакопеременны (п.п. 4–9). Такое разделение обусловлено различным характером поведения границ полученного интервала оценок состояния. Это видно, если записать уравнение ошибки для рассматриваемой системы.

Пусть $\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}$ обозначают оценки состояния системы для нижней и верхней границ интервала соответственно. Тогда производные оценок состояния системы для каждой из двух границ примут вид

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \underline{d}(t,y,u) + \mathbf{LC}\left(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}\right),$$

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} + \overline{d}(t,y,u) + \mathbf{LC}\left(\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\right).$$

Запишем уравнение ошибки для нижней границы интервала как разность между состоянием и его оценкой:

$$\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{e}}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\underline{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\mathbf{p},t)\mathbf{x} + d(t,y,u) - \underline{\mathbf{A}\mathbf{x}} - \underline{d}(t,y,u) - \mathbf{LC}\left(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{x}}\right).$$

Для верхней границы интервала уравнение ошибки записывается аналогично.

После преобразований динамика ошибки принимает следующий вид:

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}} = \left(\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{LC}\right)\underline{\mathbf{e}} + \left(\mathbf{A}(\mathbf{p},t) - \underline{\mathbf{A}}\right)\mathbf{x}.$$

Исходя из вида уравнения, можно сделать вывод о том, что второе слагаемое оказывает влияние на значение ошибки, следствием чего является возможность смены относительной ориентации границ интервала оценок состояния системы, если состояние меняет знак. Следовательно, системы с неотрицательными и знакопеременными значениями состояния стоит рассматривать отдельно и во втором случае предпринимать действия по исключению влияния данного фактора. Это можно осуществить двумя способами – сдвигом координат в область с положительными значениями состояний (п.п. 4, 6, 8) или записью уравнений, описывающих динамику наблюдателей, в другом виде, с использованием постоянной матрицы **A** и матрицы Δ**A**, состоящей из неотрицательных элементов (п.п. 5, 7, 9).

Как уже отмечалось, необходимым условием построения интервального наблюдателя является особый вид матрицы, описывающей динамику объекта и наблюдателей. Они должны обладать свойством мецлеровости. Кроме того, так как на данном этапе рассматриваются устойчивые линейные системы, эти матрицы также должны удовлетворять условиям гурвицевости. Здесь можно отметить три варианта:

1. система сразу обладает необходимыми свойствами мецлеровости и гурвицевости (п.п. 1, 4, 5); подобный вариант встречается крайне редко;
2. может быть найден такой коэффициент усиления наблюдателя **L**, что **A** – **LC** является гурвицевой и мецлеровой (п.п. 2, 6, 7);
3. коэффициент усиления наблюдателя **L** должен обеспечить лишь устойчивость ошибки наблюдения, а далее предлагается статическое преобразование координат, которое обеспечивает требуемое свойство кооперативности (п.п. 3, 8, 9).

Таким образом, при анализе условий синтеза интервальных наблюдателей для линейных систем с неизвестными нестационарными параметрами необходимо принять во внимание знакопеременность значений состояний рассматриваемой системы и способ получения матрицы, описывающей динамику наблюдателей, в мецлеровом виде. Предполагается также устойчивость системы и обеспечение устойчивости траекторий наблюдателей с помощью выбора коэффициентов усиления **L**. Все возможные комбинации указанных условий приведены в п.п. 1–9. Следовательно, для любой системы из рассматриваемого класса можно построить интервальный наблюдатель, позволяющий получить область оценок переменных состояния системы, гарантированно содержащую фактическое значение состояния в данный момент времени, при соблюдении определенных условий, которые были проанализированы в данной работе.

Заключение

Показано, что интервальный наблюдатель позволяет получить область оценок переменных состояния системы, гарантированно содержащих фактическое значение состояния в данный момент времени. Получены условия построения подобного устройства оценки для рассматриваемого класса систем при различных комбинациях свойств системы.

Доказательство ограниченности и поиск условий ограниченности траекторий наблюдателя для каждого из представленных случаев является направлением будущих исследований.

Литература

1. Meurer T., Graichen K., Gilles E.-D. (Eds). Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Springer, 2005. – V. 322. – P. 422.
2. Fossen T.I., Nijmeijer H. New Directions in Nonlinear Observer Design. – Springer, 1999. – 525 p.
3. Nonlinear Observers and Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Besançon G. (Ed.), Springer, 2007. – V. 363. – 224 p.
4. Bernard O., Gouzé J.L. Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models // J. Process Control. – 2004. – V. 14. – P. 765–774.
5. Jaulin L. Nonlinear bounded-error state estimation of continuous time systems // Automatica. – 2002. – V. 38. – № 2. – P. 1079–1082.
6. Kieffer M., Walter E. Guaranteed nonlinear state estimator for cooperative systems // Numerical Algorithms. – 2004. – V. 37. – P. 187−198.
7. Moisan M., Bernard O., Gouzé J.L. Near optimal interval observers bundle for uncertain bio-reactors // Automatica. – 2009. – V. 45. – № 1. – P. 291–295.
8. Raïssi T., Videau G., Zolghadri A. Interval observers design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems // Automatica. – 2010. – V. 46 – № 3. – P. 518−527.
9. Raïssi T., Efimov D., Zolghadri A. Interval state estimation for a class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2012. – V. 57. – № 1. – P. 260–265.
10. Mazenc F., Bernard O. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances // Automatica. – 2011. – V. 47. – № 1. – P. 140–147.
11. Smith H.L. Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems of Surveys and Monographs // AMS. – Providence, 1995. – V. 41. – 174 p.
12. Efimov D., Raïssi T., Chebotarev S., Zolghadri A. Interval State Observer for Nonlinear Time Varying Systems // Automatica. – 2012 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109812004761, своб., Яз. англ. (дата обращения 02.11.2012).

Чеботарев Станислав Геннадьевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, freest5@gmail.com

Кремлев Артем Сергеевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, kremlev_artem@mail.ru