УДК 517.521: 004.046

# СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ *n*-МЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ ПО БАЗИСУ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВСПЛЕСКОВ

**А.Ю. Гришенцев**

Рассмотрены свойства способа декомпозиции *n*-мерных цифровых сигналов по базису прямоугольных всплесков. Показано выполнение свойства линейного преобразования и условия сохранения энергии сигнала при переходе от пространственного к частотно-пространственному представлению. Сформулирован переход к ортогональной форме преобразования.

**Ключевые слова:** декомпозиция *n*-мерных сигналов, спектральный анализ, цифровая обработка сигналов.

## Введение

На сегодняшний день наиболее востребованными способами взаимного преобразования цифрового сигнала из частотной в пространственную область являются Фурье- и вейвлет-преобразование [1, 2]. Вейвлет-преобразование, также как и оконное преобразование Фурье, позволяет не только получить спектр сигнала, но и локализовать его в пространстве. В настоящей работе рассматриваются свойства способа преобразования по базису прямоугольных всплесков (БПВ) [3, 4], который также позволяет получить пространственную локализацию спектра цифрового сигнала, при этом достаточно просто реализуется с помощью программных или только аппаратных средств.

## Свойства преобразования по базису прямоугольных всплесков

Основной задачей рассматриваемого способа декомпозиции по БПВ является получение спектра n-мерного цифрового сигнала и его локализация в пространстве $R^n$, фактически отображение цифрового сигнала в фазовое пространство. Эта задача решается в ходе прямого преобразования (декомпозиции) путем последовательных итеративных вычислений в соответствии с выражением

$$f_{k-1} = f_k - S_k, \tag{1}$$

где $k$ – номер спектрального элемента декомпозиции $S_k$, выделяемого по масштабному признаку из сигнала $f_k$. Значение индекса $k$ соответствует протяженности взаимно перпендикулярных и параллельных элементов спектральных компонент, $f_k$ – остаточный сигнал. Максимальное (исходное) значение $k$ равно *K*, $S_k$ – спектральные элементы декомпозиции, отобранные по масштабному признаку. Сумма всех полученных в ходе прямого преобразования спектральных элементов декомпозиции $S_k$ является результатом обратного преобразования (синтеза) и равна

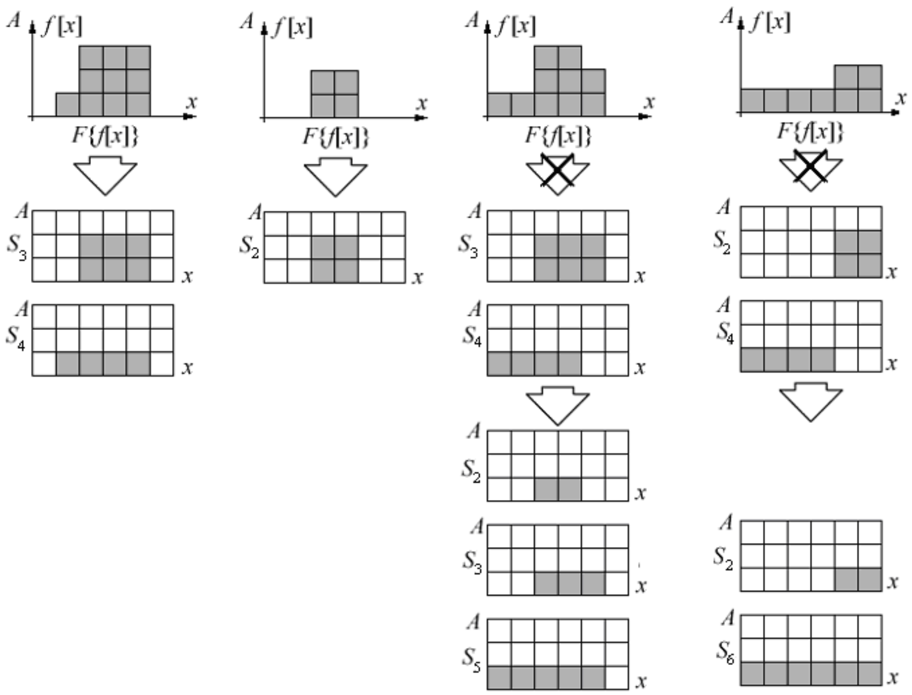
$$f_K = \sum_{k=1}^{K} S_k . \tag{2}$$

Таким образом, разложение *n*-мерного сигнала происходит не по выбранному заранее *n*-мерному базису (базисной функции), а по взаимно параллельным и перпендикулярным элементам исходного сигнала, которые образуют множество уникальных для данного сигнала *n*-мерных базисов, являющихся частью исходного сигнала. Основой для формирования таких базисов разложения *n*-мерного сигнала служит меандр-подобный сигнал, называемый в рамках рассматриваемого способа элементарным всплеском. Под элементарным всплеском будем понимать дискретную структуру, имеющую размерность, равную размерности исходного сигнала с отличной от нуля амплитудой. В направлении выделения элементарного всплеска его протяженность может иметь любое отличное от нуля значение, но не более размера исходного сигнала в данном направлении. По другим направлениям размеры элементарного всплеска равны единице дискретизации соответствующих направлений [3, 4].

На рис. 1 показаны некоторые свойства конфигурации элементов декомпозиции на примере одномерных сигналов. Приведены варианты четырех одномерных сигналов $f[x]$ и некоторые возможные способы декомпозиции. Стрелками обозначены переходы к корректным вариантам декомпозиции, перечеркнутые стрелки обозначают некорректные варианты декомпозиции (присутствуют на рис. 1, в, г) с последующим переходом к корректным. В ходе наблюдения за возможными вариантами декомпозиции и разделением их на корректные и некорректные можно сделать некоторые обобщения:

(1) менее протяженные элементарные всплески конфигурационно могут быть расположены только полностью над непрерывным более протяженным, либо над нулевым (имеется в виду его отсутствие) всплеском;

(2) соседние всплески не могут быть расположены неразрывно, между всплесками по оси положения в пространстве должен присутствовать разрыв, минимальная протяженность которого равна единице дискретизации сигнала в данном направлении.




(3)

а б в г

Рис. 1. Допустимые и недопустимые варианты конфигурации элементов декомпозиции по БПВ: $f[x]$ – исходные сигналы с амплитудой $A$; $S_k$ – спектральный элемент декомпозиции, полученный выделением всплесков протяженностью $k$

Указанные свойства (1)–(2) являются следствием декомпозиции сигнала в соответствии с алгоритмом, рассмотренным в [3, 4], и могут быть обобщены на случай многомерного сигнала. Из свойства (2) можно вывести понятие периода $T = k + 1$ (или минимального периода) элементарного всплеска как минимально допустимого периода повторения элементарных всплесков заданной протяженности $k$. Покажем, что декомпозиция по БПВ является линейным преобразованием, т.е. обладает свойствами линейной системы – аддитивностью и однородностью [5].

Аддитивность декомпозиции по БПВ обусловлена тем, что суммирование сигналов $f[x] + g[x]$ в пространственной области эквивалентно суммированию сигналов в пространственно-частотной области $F\{f[x]\} + F\{g[x]\}$, причем при суммировании сигналов в пространственно-частотной области необходимо приводить результат суммирования к конечному виду в соответствии со свойствами (1)–(2). Аддитивность преобразования является следствием равенства суммы $f[x] + g[x] = F^{-1}\{F\{f[x]\} + F\{g[x]\}\}$ для каждого конкретного значения $x$ и одновременной инвариантности декомпозиции по БПВ. Однородность декомпозиции по БПВ $F\{m \cdot f[x]\} = m \cdot F\{f[x]\}$ является следствием равенства $m\sum_{k=1}^{K} S_k[x] = m \cdot f[x]$, где $m$ – рациональное число.

Для $n$-мерного пространства $R^n$ можно записать свойства линейности преобразования по БПВ:
аддитивность – $f[R^n] + g[R^n] = F^{-1}\{F\{f[R^n]\} + F\{g[R^n]\}\}$,

однородность – $m\sum_{k=1}^{K} S_k[R^n] = m \cdot f[R^n]$.

Отметим, что декомпозиция по БПВ не является инвариантом относительно сдвига сигнала $f[R^n]$, так как сдвиг исходного сигнала вызывает соответствующее смещение положения элементарных всплесков. При сдвиге сигнала $f[R^n]$ инвариантом является спектральная плотность $p$, рассчитываемая как отношение суммы всех элементов каждого спектрального элемента декомпозиции $S_k[R^n]$ к числу всех дискретных элементов, в котором задана функция $f[R^n]$. Покажем, что при преобразовании по БПВ неизменной остается энергия. В случае одномерного сигнала $f[x]$, заданного на интервале $X$, его энергия может быть определена как

$$E=\sum_X f^2[x], \tag{3}$$

из выражения (2) [1] следует, что

$$f^2[x]=\left(\sum_{k=1}^{K} S_k[x]\right)^2. \tag{4}$$

Раскрывая выражение (4) как полиномиальный многочлен второй степени, получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{K} S_k[x]\right)^2=\sum_{k=1}^{K} S_k^2[x]+2\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K} S_i[x]S_j[x],$$

или, в конечном виде,

$$\sum_X f^2[x]=\sum_X\left[\sum_{k=1}^{K} S_k^2[x]+2\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K} S_i[x]S_j[x]\right]. \tag{5}$$

Правую часть, стоящую под общей суммой выражения (5), можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{K} S_k^2[x]+2\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K} S_i[x]S_j[x]=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} S_i[x]S_j[x]. \tag{6}$$

На рис. 2 приведен пример произведений ненулевых спектральных элементов декомпозиции $S_k$ сигнала $f[x]$ в соответствии с выражением (6). Заметим, что произведения спектральных элементов декомпозиции $S_iS_j$ имеют протяженность наименьшего значения $\min(i,j)$ и размерность квадрата амплитуды $A^2$. Извлекая корень из суммы произведений $S_iS_j$, выделенных по признаку равных протяженностей, получаем взаимно ортогональные формы спектральных элементов декомпозиции:

$$\bar{S}_i[x]=\sqrt{S_i^2[x]+2\sum_{j=i+1}^{K} S_i[x]S_j[x]}.$$

В силу ортогональности (выполняется равенство Парсеваля как обобщение теоремы Пифагора для $n$-мерного случая) обратное преобразование будет иметь вид

$$f[x]=\sqrt{\sum_{i=k}^{K}\bar{S}_i^2[x]}, \tag{7}$$

а эквивалент выражения (3) записывается в форме

$$\sum_X f^2[x]=\sum_X\left[\sum_{k=1}^{K}\bar{S}_k^2[x]\right] \tag{8}$$

для $\bar{S}_i[x]$ и в форме

$$\sum_{R^n} f^2[R^n]=\sum_{R^n}\left[\sum_{k=1}^{K}\bar{S}_k^2[R^n]\right]. \tag{9}$$

для пространства $R^n$. Отметим, что выражение (9) для преобразования по БПВ можно рассматривать как аналог уравнения Парсеваля для преобразования Фурье [5–7].

Рассмотрим в качестве примера переход к ортогональной форме $\bar{S}_i[x]$ для сигнала $f[x]$ на рис. 2. Вначале производится расчет множества спектральных элементов декомпозиции $S=\langle S_5,\, S_3,\, S_2,\, S_1\rangle$ в соответствии с (1), подробное описание декомпозиции можно найти в [3, 4]. Далее формируются элементы произведений $S\times S$ (упорядоченные пары), для которых, впрочем, выполняется условие коммутативности $S_i\times S_j=S_j\times S_i$. Результат произведений отображен в центральной части рис. 2. Произведем запись значений амплитуд спектральных элементов декомпозиции в ортогональной форме для 4-го отсчета (отсчет производится слева, начиная с нуля по оси $x$, шкала отображена на графике $f[x]$): $\bar{S}_5[4]=\sqrt{2^2}=2$, $\bar{S}_3[4]=\sqrt{3^2+2\cdot 3\cdot 2}=\sqrt{21}$, $\bar{S}_2[4]=\sqrt{1^2+2\cdot 1\cdot 2+2\cdot 1\cdot 3}=\sqrt{11}$, $\bar{S}_1[4]=\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 3+2\cdot 2\cdot 1}=2\sqrt{7}$. Результаты расчетов $\bar{S}_i[x]$ представлены на рис. 2 (столбец справа). Очевидно, что амплитуды исходного сигнала по значениям $\bar{S}_i[x]$ могут быть восстановлены в соответствии с выражением (7). Далее рассчитаем полную энергию $E$ в соответствии с (8): $\sum_X\left[\sum_{k=1}^{K}\bar{S}_k^2[x]\right]=5\cdot 4+3\cdot 21+2\cdot 11+1\cdot 28=133$, вычисление по выражению (3) дает результат $\sum_X f^2[x]=0^2+2^2+5^2+6^2+8^2+2^2+0^2+0^2=133$.

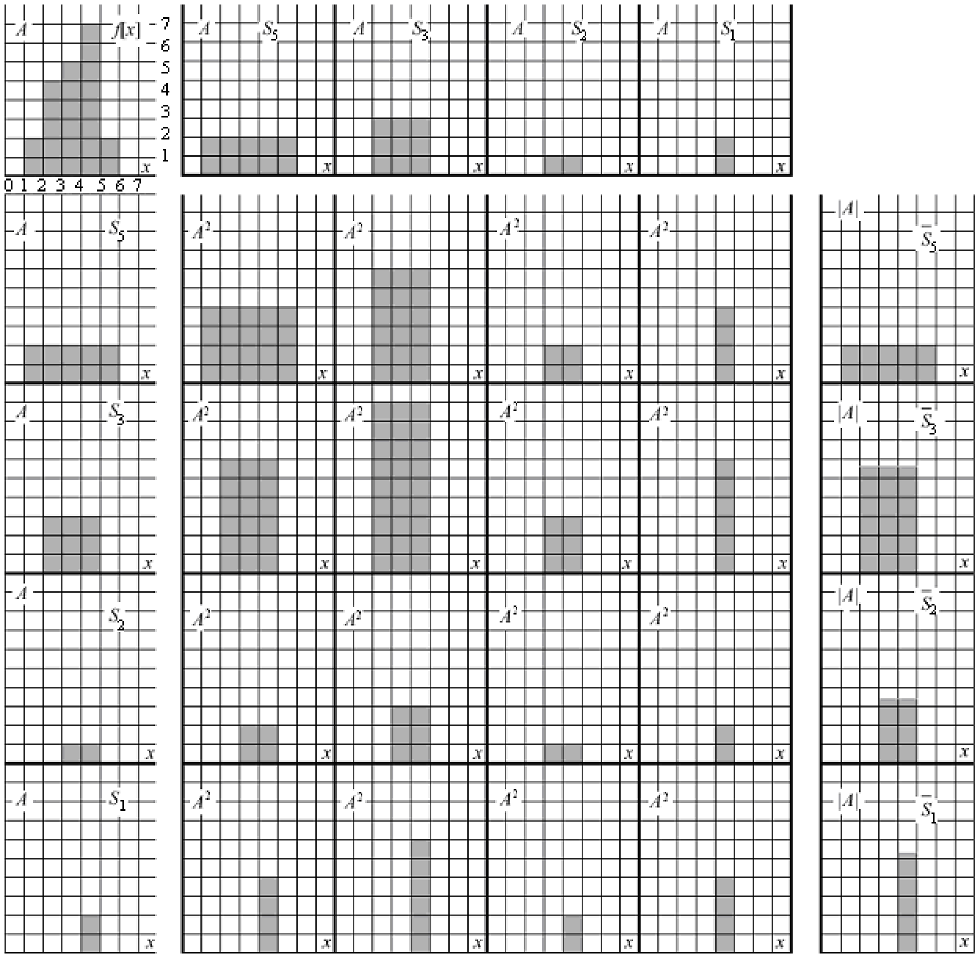


Рис. 2. Получение ортогональной формы декомпозиции по БПВ:
$f[x]$ – исходный сигнал с амплитудой $A$ ; $S_k$ – спектральный элемент декомпозиции, полученный выделением всплесков протяженностью $k$

Порядок вычислительной сложности алгоритма прямого преобразования по БПВ для одномерного случая можно оценить как $\mathbf{O}(N)$, где $N$ – размер массива данных.

Для прямого преобразования по БПВ в $n$-мерном пространстве $R^n$ сигнала $f[R^n]$, ограниченного размерами пространства, в котором задан сигнал $X_1 \cdot X_2 \cdot, ..., \cdot X_n$, порядок вычислительной сложности можно оценить как $\mathbf{O}(n \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot, ..., \cdot X_n)$.

Отметим, что все преобразование в соответствии с (1) и (2) может быть выполнено на кольце целых чисел, что обеспечивает высокое быстродействие и достаточно простую реализацию способа преобразования по БПВ полностью аппаратными средствами.

## Заключение

В работе показаны свойства преобразования по базису прямоугольных всплесков – линейность, сохранение энергии сигнала, ортогональная форма преобразования. Рассмотрен ряд примеров, выполнена оценка вычислительной сложности. Приведены выражения, готовые к непосредственному применению в практических вычислениях.

## Литература


1. Чобану М. Многомерные многоскоростные системы обработки сигналов. – М.: Техносфера, 2009. – 480 с.
2. Шарк Г.Г. Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.
3. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Декомпозиция $n$-мерных цифровых сигналов по базису прямоугольных всплесков // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2012. – № 4 (80). – С. 75–79.

4. Заявка на изобретение. Способ построения спектра *n*-мерных неразделимых цифровых сигналов. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. № 2011126856, от 29.06.2011.
5. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. – М.: Додека-XXI, 2011. – 720 с.
6. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд. – М.: Техносфера, 2009. – 856 с.
7. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. – 2-е изд. Пер. с англ. – М.: Бином пресс, 2009.– 656 с.

***Гришенцев Алексей Юрьевич*** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, tigerpost@ya.ru