УДК 531

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Е. Иванов

Предложен алгоритм математической и программной реализации метода исследования нелинейных динамических систем с тремя степенями свободы. Рассматривается нелинейная математическая модель динамической системы, которая содержит полиномы до четвертой степени от фазовых переменных с постоянными и периодическими параметрами. В результате применения метода нелинейная математическая модель движения системы приводится к автономному виду и определяются существенные параметры движения динамической системы. Приводится алгоритм модифицированного метода многочленных преобразований и алгоритмические формулы программной реализации метода, посредством которых проведен анализ приборной динамической системы с тремя степенями свободы.

Ключевые слова: алгоритм аналитического метода преобразований, методы исследования, нелинейные системы с тремя степенями свободы.

Введение

В работе предлагается алгоритм метода многочленных преобразований с последующими экспоненциальными преобразованиями и алгоритмические формулы, на основе которых автором разработан пакет программ для исследования нелинейных динамических систем с тремя степенями свободы [1]. Данный алгоритм метода реализован посредством универсальной системы Mathematica с использованием математических библиотек. Рассматриваются нелинейные динамические системы, которые описываются системой дифференциальных уравнений шестого порядка с нелинейной частью в виде полинома четвертой степени относительно фазовых координат с постоянными и периодическими коэффициентами [2]. В результате применения модифицированного метода многочленных преобразований нелинейная математическая модель динамической системы приводится к автономному виду и находятся существенные константы, определяющие свойства динамической системы [3]. Метод применен к исследованию математической модели приборной системы с малыми нелинейными частями, которые существенно влияют на решение и полностью учитываются в предлагаемом методе [4]. Точность получаемых решений с помощью аналитического метода преобразований контролируется посредством сравнения с решением, получаемым численным методом Рунге–Кутта.

Метод многочленных преобразований выполняет минимизацию количества параметров нелинейной динамической системы. В преобразованной автономной системе содержится на порядок меньше ненулевых коэффициентов, чем в исходной системе. Минимизация количества ненулевых коэффициентов упрощает исследование переходных и установившихся процессов нелинейных динамических систем [5]. Предложенные алгоритмические формулы метода и составленный пакет программ позволяют выполнять исследование установившихся и переходных режимов нелинейных динамических систем.

Нелинейная динамическая система

Рассматриваются динамические системы, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с нелинейными членами в форме многочленов от фазовых переменных с постоянными и периодическими параметрами [6]. Для исследования таких систем применяется метод многочленных преобразований. Применение этого метода связано с большим объемом трудоемких выкладок, что приводит к необходимости создания программ, позволяющих выполнять расчеты средствами современной вычислительной техники. Автором составлен комплекс программ для реализации метода на языке программирования высокого уровня Mathematica. Разработанные программы позволяют проводить исследование динамических нелинейных систем, получать аналитический вид решения и преобразовывать систему к автономному виду.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка с правыми частями в виде многочленов до четвертой степени относительно фазовых переменных с постоянными и периодическими параметрами, представленную в матричном виде:

$$I\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = \sum_{|\nu|=1}^{4} h_\nu \cos(\omega t)^{\nu_1} \sin(\omega t)^{\nu_2} q_1^{\nu_3} q_2^{\nu_4} q_3^{\nu_5} \dot{q}_1^{\nu_6} \dot{q}_2^{\nu_7} \dot{q}_3^{\nu_8}, \tag{1}$$

где $q = \left[q_1, q_2, q_3\right]^T$ – вектор обобщенных координат; I, B, C – матрицы третьего порядка; $\nu = (\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6 \nu_7 \nu_8)$ – векторный индекс, $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_8$.

Для записи на языке программирования выражение суммы коэффициентов с векторным индексом представлено в следующем виде:

$$\sum_{\nu=1}^{4} h_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5,\nu_6,\nu_7,\nu_8} = \sum_{i_8=1}^{4} \sum_{i_7=0}^{i_8} \sum_{i_6=0}^{i_7} \sum_{i_5=0}^{i_6} \sum_{i_4=0}^{i_5} \sum_{i_3=0}^{i_4} \sum_{i_2=0}^{i_3} \sum_{i_1=0}^{i_2} h_{i_1, i_2-i_1, i_3-i_2, i_4-i_3, i_5-i_4, i_6-i_5, i_7-i_6, i_8-i_7}.$$

Предполагается, что система содержит малые нелинейный части $\left|h^S_{\ \nu}\right| < \varepsilon$.

Алгоритм метода

Запишем алгоритмические формулы метода многочленных преобразований, применимые для программной реализации метода. Применим комплексно-сопряженные переменные для записи периодических функций в исходной системе:

$q_0 = \exp(i\omega t)$ и $\overline{q}_0 = \exp(-i\omega t)$, $\lambda_1 = i\omega$.

Запишем в новых переменных исходную систему:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(q_0 + \overline{q}_0) \text{ и } \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(q_0 - \overline{q}_0). \tag{2}$$

Систему дифференциальных уравнений (1) можно представить в виде системы восьми дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши с фазовым вектором $X = \left[q_0 \overline{q}_0 q_1 q_2 q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3\right]^T$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ A^{-1}H & -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A^{-1}G \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где постоянная квадратная блочная матрица порядка имеет вид $W = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix}$. Выполним линейное преобразование $Y = DX$, в результате которого линейная часть системы (3) приводится к диагональному виду:

$$\dot{Y} = \Lambda Y + R\Big|_{X \to D^{-1}Y}, \text{ где } \Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \overline{\lambda}_1, ..., \lambda_4, \overline{\lambda}_4]. \tag{4}$$

Применим многочленное преобразование к системе (4), содержащее многочлены четвертой степени:

$$y_S = z_S + \sum_{|\nu|=2}^{4} a_\nu^S Z^\nu, (S = 3, ..., 8), Z^\nu \equiv z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} ... z_8^{\nu_8},$$

где a_ν^S – неизвестные коэффициенты преобразования.

В результате многочленного преобразования система (4) приводится к автономному виду:

$$\dot{z}_S = \lambda_S z_S + \sum_{|\nu|=2}^{4} q_\nu^S Z^\nu, \ (S = 3, ..., 8), \tag{5}$$

где q_ν^S – искомые коэффициенты преобразованной системы.

Автором получены алгоритмические формулы для расчета коэффициентов преобразования и преобразованной системы, которые применены в составленном пакете программ:

$$\sum_{|\nu|=2}^{4} q_\nu^S Z^\nu + \sum_{|\nu|=2}^{4} (a_\nu^S Z^\nu (\sum_{k=1}^{8} \lambda_k \nu_k - \lambda_S)) + \sum_{|\nu|=2}^{4} (a_\nu^S Z^\nu \sum_{k=3}^{8} \nu_k z_k^{-1} \sum_{|\mu|=2}^{4} q_\mu^k Z^\mu) = R_S(Z), \ (S = 3, ..., 8).$$

Для нахождения особых значений векторного индекса при фиксированном S необходимо найти решение двух уравнений [7]:

$$\sum_{k=1}^{8} \lambda_k \nu_k - \lambda_S \approx 0, \ \sum_{k=1}^{8} \nu_k = 2, 3, 4. \tag{6}$$

Постоянные q_ν^S приравниваем к нулю при неособых значениях индексов; при таких значениях вычисляют постоянные a_ν^S. И наоборот, при особых значениях индексов полагают коэффициенты a_ν^S равными нулю и вычисляют q_ν^S.

В нерезонансном случае из уравнений (6) находим следующие особые индексы:

при $q_\nu^3: \nu=(00100011), \nu=(00101100), \nu=(00210000), \nu=(11100000)$,

при $q_\nu^4: \nu=(00010011), \nu=(00011100), \nu=(00120000), \nu=(11010000)$,

при $q_\nu^5: \nu=(00001011), \nu=(00002100), \nu=(00111000), \nu=(11001000)$,

при $q_\nu^6: \nu=(00000111), \nu=(00001200), \nu=(00110100), \nu=(11000100)$,

при $q_\nu^7: \nu=(00000021), \nu=(00001110), \nu=(00110010), \nu=(11000010)$,

при $q_\nu^8: \nu=(00000012), \nu=(00001101), \nu=(00110001), \nu=(11000001)$.

Для получения аналитического решения автономной системы (5) выполним замену переменных:

$z_S = \rho_S \exp\left(i(t\,\mathrm{Im}\,\lambda_S + \theta_S)\right),\ \bar{z}_{S+1} = \rho_S \exp\left(i(t\,\mathrm{Im}\,\lambda_{S+1} - \theta_S)\right),\ S = 3,5,7;\ \ z_{1,2} \equiv \exp(\pm it\omega)$.

В результате получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\rho}_S = \mathrm{Re}(\lambda_S)\rho_S + \mathrm{Re}\left(\psi_S\right),\ \dot{\theta}_S = \rho_S^{-1}\,\mathrm{Im}\left(\psi_S\right),\ \ S = 3,5,7;$$

$$\psi_S = \sum_{|\nu|=2}^{4} q_\nu^S \rho_3^{\nu_3+\nu_4}\rho_5^{\nu_5+\nu_6}\rho_7^{\nu_7+\nu_8}\exp(i(\theta_3(\nu_3-\nu_4)+\theta_5(\nu_5-\nu_6)+\theta_7(\nu_7-\nu_8)-\theta_S)). \qquad (7)$$

В нерезонансном случае [8] экспонента не входит в систему (7), так как ее степень равна нулю. Приравнивая к нулю правые части системы (7), находим стационарные решения. Для получения решения системы (1) в исходных переменных выразим вектор Y по формулам замены, обратной линейной (2):

$X = D^{-1}Y$.

Получив обобщенные координаты системы решение можно представить в графическом виде.

В результате применения метода для анализа динамических систем на базе разработанного автором пакета программ были получены подробные качественные и количественные характеристики изучаемых динамических систем.

Заключение

В работе приведен алгоритм для программной реализации метода исследования нелинейных динамических систем с тремя степенями свободы. Выведены алгоритмические формулы метода и разработан пакет программ для исследования методом нелинейных задач. В результате применения метода многочленных преобразований нелинейная периодическая система приводится к автономному виду, получены установившиеся и переходные режимы динамических систем в условиях периодического внешнего воздействия. Определены существенные параметры динамической системы, характеризующие переходные процессы и установившиеся режимы системы.

Приведенный алгоритм реализован в созданных программах на языке программирования высокого уровня Mathematica. Для приборных динамических систем с тремя степенями свободы построены графики, которые показали точность получаемых результатов и применимость метода к широкому кругу задач общего вида (1).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-08-01046-а.

Литература

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа. – 2004. – 591 с.
2. Зиновьев Н.М., Мяснянкин Ю.М. Введение в теорию колебаний конструкций: Учебное пособие. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2005. – 35 с.
3. Иванов С.Е. Определение установившихся режимов работы виброзащитной системы с двумя степенями свободы // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 4 (68). – С. 44–46.
4. Иванов С.Е. Исследование нелинейных динамических систем с тремя степенями свободы // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – № 4 (74). – С. 62–64.
5. Иванов С.Е. О реализации численно-аналитического метода многочленных преобразований на компьютере // Современные технологии: Труды молодых ученых ИТМО. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2001. – С. 138–141.
6. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания: Учебное пособие. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2002. – 292 с.
7. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. – Л.: Машиностроение, 1975. – 198 с.
8. Мельников В.Г., Мельников Г.И., Иванов С.Е. Компьютерные технологии в механике приборных систем: Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 127 с.

Иванов Сергей Евгеньевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат физ.-мат. наук, доцент, sivanov@mail.ifmo.ru