УДК 621.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ КОНУСНОГО ЭЛЕМЕНТА АМОРТИЗИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

К.С. Малых[a], Г.И. Мельников[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: Malykh-konstantin@yandex.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 20.10.16, принята к печати 01.03.17
doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-2-354-358
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Малых К.С., Мельников Г.И. Моделирование напряженно-деформированного состояния линейно упрочняющегося конусного элемента амортизирующего устройства // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 2. С. 354–358. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-2-354-358

Аннотация

Предмет исследования. Исследована система амортизации с элементами, способными линейно упрочняться – упрочняющимися элементами. Система такого типа трансформирует кинетическую энергию движущегося поступательно прямолинейно технического объекта в энергию деформации и работу силы трения. Рассмотрен пример с линейно упрочняющимся элементом в виде конической оболочки из жесткопластического материала. **Метод**. Теоретическое исследование выполнено на основе теории тонкостенных оболочек и гипотез Кирхгофа–Лява. В дополнение использованы закон Кулона, моделирующий трение в контактирующих поверхностях, и условие текучести материала Сен-Венана. **Основные результаты**. Разработана методика определения напряженно-деформированного состояния в конической оболочке, деформируемой жестким конусом с учетом силы трения. **Практическая значимость**. Результаты исследования позволяют проводить расчеты напряженно-деформированного состояния конической оболочки при вдавливании в нее жесткого конуса. Также эти результаты открывают возможность дальнейшего исследования систем амортизации с линейно упрочняющимся элементом в виде конической оболочки.

Ключевые слова
система амортизации, коническая оболочка, жесткопластический материал, теория тонкостенных оболочек

Благодарности
Работа поддержана грантом РФФИ № 16-08-00997.

MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF LINEAR WORK-HARDENING CONICAL ELEMENT OF DAMPING SYSTEM

K.S. Malykh[a], G.I. Melnikov[a]

[a]ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: konstantin@yandex.ru

Article info
Received 20.10.16, accepted 01.03.17
doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-2-354-358
Article in Russian

For citation: Malykh K.S., Melnikov G.I. Modeling of stress-strain state of linear work-hardening conical element of damping system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 354–358 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-2-354-358

Abstract

Subject of Research. The paper deals with research of a damping system with elements having an ability to be linear work-hardening – work-hardening elements. This system transforms kinetic energy of moving progressively straightforward technical object into deformation energy and work of friction force. Example with element in the form of rigid-plastic conical shell is analyzed. **Method**. Research was carried out theoretically and was based on theory of thin shells and hypothesis of Kirchhoff-Love. In addition, Coulomb law modeling friction between both contact surfaces and Saint-Venant yield criterion are used. **Main Results**. Technique of strain-stress state examination in conical shell being deformed by rigid cone in view of friction force was generated. **Practical Relevance**. Results of research give the possibility to calculate strain-stress state of conical shell at indentation of rigid cone into it. These results open the door for future research of damping systems with plastic element in the form of a conical shell.

Keywords
damping system, conical shell, linear work-hurdling material, thin shell theory
Acknowledgements
This work was supported by the RFBR grant No. 16-08-00997

Введение

Для обеспечения работоспособности и прочности технического объекта с большой массой расположенной в ней аппаратуры, подвергаемого динамической нагрузке, обычно используется система амортизации с элементом, способным деформироваться пластически – пластическим элементом. Особенностью подобных конструкций является преобразование кинетической энергии объекта в энергию деформации пластического элемента и в работу сил трения и нагрева материала. Вопросы, связанные с проектированием и практическим применением таких систем, исследуются в ряде работ [1–4]. Известны конструктивные решения с пластическим элементом в виде трубы, прямолинейного и криволинейного стержня, кольцевых цилиндрических втулок, лент, кольцевых шайб[1]. Пластический элемент должен быть спроектирован таким образом, чтобы обеспечить необходимую податливость, с одной стороны, и быть достаточно прочным и жестким, с другой стороны.

В работах [5–7] представлен метод исследования системы амортизации с пластическим элементом на основе системы дифференциальных уравнений движения массы после динамического воздействия с задаваемыми заранее параметрами жесткости. Авторы настоящей работы ставят перед собой задачу определения параметров прочности и жесткости пластического элемента. Дальнейшие исследования связаны с изучением движения исследуемого тела при заданном нелинейном сопротивлении, данная задача будет решена методом Пуанкаре–Дюлака [8–12].

В работе рассматривается система амортизации с линейно упрочняющимся элементом в виде трубы переменного диаметра – конической оболочки. Система состоит из двух тел: линейно упрочняющегося элемента в виде оболочки и объекта, связанного с конусом. Усеченная, изотропная, тонкостенная коническая оболочка из жесткопластического материала закреплена по грани с большим радиусом. Абсолютно жесткий круговой конус двигается поступательно прямолинейно, деформируя оболочку. Задачей данной работы является определение напряженно-деформированного состояния конической оболочки.

Напряженно-деформированное состояние конической оболочки для упругого материала

Рассмотрим усеченную коническую оболочку 1 высоты H и толщины a с радиусами на торцах R_1 и R_2 с образующей, наклоненной к оси на малый угол $\alpha/2$ (рис. 1, а). Материал оболочки жесткопластический. Верхний торец оболочки ограничен от перемещений вдоль образующей. В оболочку помещен абсолютно жесткий конус 2 с малым углом раствора α и максимальным радиусом R_3, перемещенный на расстояние y_0, что привело к радиальной деформации. Требуется определить напряженно-деформированное состояние оболочки.

Рассмотрим полосу конической оболочки (рис. 1, б) большого и малого радиусов R, $R+dR$, ширины $Rd\varphi$ и высоты dl, нагруженную внутренним, равномерным, нормальным давлением Q. Здесь R, $R+dR$ – текущие радиусы после деформирования; $d\varphi$ – малый угол, характеризующий размеры полосы: Q – давление от конуса. Обозначим S_3 – площадь боковых поверхностей полосы, перпендикулярных оси φ, S_1 и S_2 – площади боковых поверхностей, перпендикулярных оси z, S_4 – площадь фронтальной поверхности. Запишем значения S_1, S_2, S_3, S_4 с точностью до малых величин:

$$S_1=\left(R+dR\right)ad\varphi\,,\ S_2=aRd\varphi\,,\ S_3=adl\,,\ S_4=\left(R+dR/2\right)dld\varphi\,. \tag{1}$$

На боковых поверхностях с площадями S_1 и S_2 действуют нормальные напряжения σ_z и $\sigma_z+d\sigma_z$, на боковых поверхностях с площадью S_3 действуют нормальные напряжения σ_φ, на фронтальную поверхность с площадью S_4 действует давление от конуса Q по нормали и напряжение τ вдоль поверхности, характеризующее силу трения. Составим уравнения равновесия полосы в проекциях на оси z и φ с учетом касательного напряжения, вызванного силой трения:

$$\begin{aligned}&(\sigma_z+d\sigma_z)S_1-\sigma_z S_2-\tau S_4-2\sigma_\varphi S_3\sin(d\theta/2)=0;\\&QS_4-2\sigma_\varphi S_3\sin(d\varphi/2)=0.\end{aligned} \tag{2}$$

В частном случае ($\tau=0$) уравнения равновесия (2) представлены в [13, 14]. Примем, что касательные напряжения τ пропорциональны нормальному давлению Q:

$$\tau=fQ\,, \tag{3}$$

где f – коэффициент трения.

[1] ОСТ 92-1312-87. Амортизаторы упруго-пластические для защиты аппаратуры. Конструкция. Введ. 01.07.88. 50 с., ОСТ 92-9011-78. Элементы упруго-пластические амортизаторов пластического типа. Методика расчета. Введ. 01.07.79. 234 с.

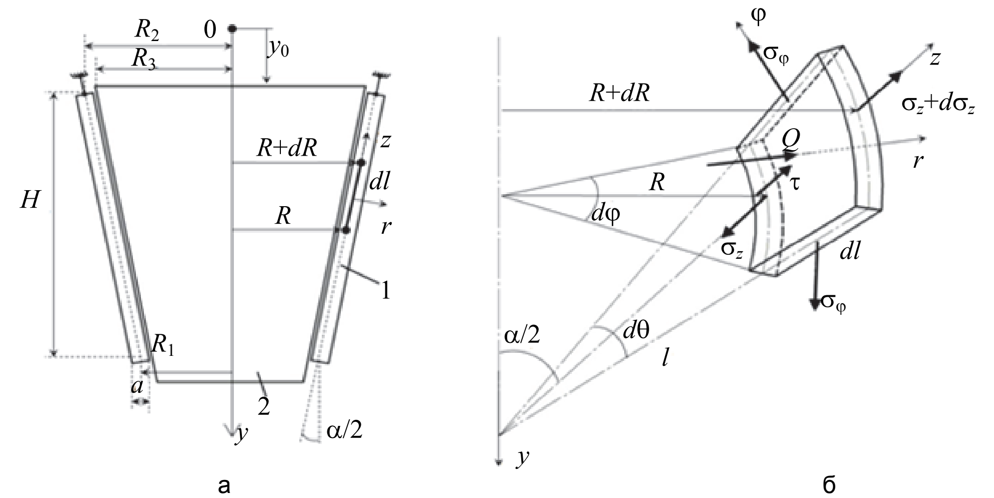

Рис. 1. Система упругая оболочка – жесткий конус (а); элемент конической оболочки (б)

Таким образом, имеем наклоненный на угол $\alpha/2$ к вертикали элемент, нагруженный по нормали и касательной и перемещающийся по горизонтали. Из принципа виртуальных перемещений видно, что коэффициент трения f не может быть выбран произвольно, а зависит от угла наклона элемента:

$f = \mathrm{tg}(\alpha/2)$.

Подставим выражения для площадей поверхностей полосы (1) в уравнения равновесия полосы (2), учитывая выражение для касательного напряжения (3), после элементарных преобразований получим следующие соотношения:

$$R\frac{d\sigma_z}{dR} + \sigma_z - \frac{1}{a} fQR\frac{dl}{dR} - 2\sigma_\varphi \frac{dl}{dR}\frac{1}{d\varphi}\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0;$$
$$QRd\varphi - 2\sigma_\varphi a\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0. \qquad (4)$$

Принимая, что $ld\theta = Rd\varphi$, легко получим геометрические соотношения с точностью до малых величин:

$$\frac{dl}{dR} = \frac{1}{\sin(\alpha/2)},\ \frac{d\theta}{d\varphi} = \sin(\alpha/2),$$

тогда, полагая приближенно $\sin(d\theta/2) = d\theta/2$, $\sin(d\varphi/2) = d\varphi/2$, подставим эти соотношения в (4):

$$\frac{d}{dR}(R\cdot\sigma_z) - A\sigma_\varphi = 0,\ \text{при } A = \left(\sin(\alpha/2) + f\right)/\sin(\alpha/2);$$
$$Q = \sigma_\varphi \frac{a}{R}. \qquad (5)$$

Соотношения (5) являются дифференциальными уравнениями напряженно-деформированного состояния тонкостенной оболочки при внутреннем давлении и силой трения. В частном случае ($f = 0$) уравнения, представленные в [13, 14], совпадают с уравнениями (5).

В уравнениях (5) не учтено сжимающее напряжение σ_r, которое много меньше σ_φ и σ_z. Вследствие малости угла α выражение для сжимающих напряжений принимаем приближенно из решения задачи для цилиндрической оболочки [13, 14], для использования данного решения введем условие $a \ll R$,

$Q = 2\sigma_r$,

подставляя его в дифференциальное уравнение (5), получаем уравнение, связывающее сжимающее и радиальное напряжения:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi a/2R. \qquad (6)$$

Напряженно-деформированное состояние конической оболочки для жесткопластического материала

Получим уравнения напряжений с учетом условия упрочнения материала. Рассмотрим диаграмму σ-ε линейно-упрочняющегося материала без учета упругих деформаций (рис. 2), с пределом текучести σ_m и модулем упрочнения $D = \mathrm{tg}(\beta)$. Запишем функцию напряжений от относительной деформации

$$\sigma = \sigma_m + D\varepsilon \text{, при } D = \mathrm{tg}(\beta) \text{,} \tag{7}$$

запишем затем выражение для относительной деформации от радиуса R:

$$\varepsilon = (R - R_0)R_0^{-1} \text{,} \tag{8}$$

где R_0 – радиус полосы до деформации.

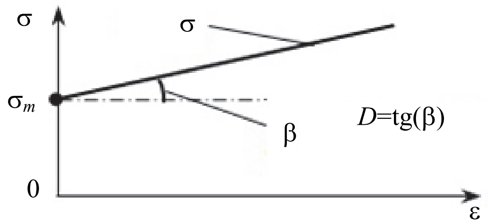

Рис. 2. График упрочнения материала

Подставляя в функцию напряжений (7) выражение для относительной деформации (8), получим функцию напряжений от радиуса R:

$$\sigma = \sigma_m + D\varepsilon \text{.} \tag{9}$$

Известно [15], что при сложном напряженном состоянии материал выходит из зоны упругости при условии Сен-Венана $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma$, где $\sigma_1 = \sigma_\varphi$, $\sigma_3 = \sigma_r$ – максимальный и минимальный компоненты напряжения. Тогда условие текучести в данной задаче имеет вид

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma. \tag{10}$$

Подставим функцию напряжений (9), уравнение (8) и (6) в условие (10) и получим выражение для радиального напряжения от радиуса R:

$$\sigma_\varphi = \frac{(\sigma_m + D(R - R_0)R_0^{-1})R}{2R - a} \text{.} \tag{11}$$

Подстановкой выражения (11) в дифференциальное уравнение (5) получим дифференциальное уравнение, учитывающее условие текучести материала:

$$\frac{d}{dR}(R \cdot \sigma_z) = 2A\frac{(\sigma_m + D(R - R_0)R_0^{-1})R}{2R - a} \text{.} \tag{12}$$

Радиус полосы R полосы изменяется от значения R_0 до конечного значения R_k, следовательно, продольные напряжения определяются по формуле, полученной из уравнения (12):

$$\sigma_z = \frac{2A}{R_k}\int_{R_0}^{R_k} \frac{(\sigma_m + D(R - R_0)R_0^{-1})R}{2R - a}dR, \quad \text{при} \quad R_k = R_0 + 2y_0\mathrm{tg}(\alpha/2) \text{.}$$

Заключение

В результате проведенной работы получена математическая модель напряженно-деформированного состояния в конической оболочке из жесткопластического материала при вдавливании жесткого конуса с учетом силы трения.

Данное решение позволяет определить в дальнейшем жесткость системы и величину поглощаемой энергии для расчета параметров системы амортизации с линейно упрочняющимся элементом.

Литература

1. Ефремов А.К. Системы защиты от ударных воздействий // Наука и образование. 2015. №11. С. 344–369. doi: 10.7463/1115.0817507
2. Ефремов А.К., Симоненко Н.Н. Системы защиты конструкций от импульсивных механических воздействий: учеб. пособие. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 52 с.
3. Ефремов А.К. Исследование нелинейного амортизатора для защиты от одиночных ударов // Известия вузов. Машиностроение. 1979. № 1. С. 22–28.
4. Симоненко Н.Н. Об оценке эффективности систем амортизации одноразового действия // Труды МВТУ. 1981. № 362. С. 64–71.
5. Булат П.В., Волков К.Н., Сильников М.В., Чернышов М.В. Анализ разностных схем, основанных на точном и приближенном решении задачи Риманна // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 1. С. 139–148. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-139-148

References

1. Efremov A.K. Systems for the shock isolation of engineering objects. *Science & Education*, 2015, no. 11, pp. 344–369. doi: 10.7463/1115.0817507 (In Russian)
2. Efremov A.K., Simonenko N.N. *Protection Systems of Constructions from Impulsive Mechanical Impacts*. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997, 52 p. (In Russian).
3. Efremov A.K. Research of nonlinear shock absorber for protection against single impacts. *Izvestiia Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mashinostroenie = Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 1979, no. 1, pp. 22–28. (In Russian).
4. Simonenko N.N. About estimation of efficiency of single action cushioning systems. *Trudy MVTU im. N.E. Baumana*, 1981, no. 382, pp. 64–71. (In Russian).
5. Bulat P.V., Volkov K.N., Silnikov M.S., Chernyshev M.V. Analysis of finite-difference schemes based on exact and approximate solution of Riemann problem. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and*

6. Булат П.В., Упырев В.В., Денисенко П.В. Отражение косого скачка уплотнения от стенки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 2. С. 338–345. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-2-338-345
7. Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Batra R.C. Stress and strain recovery for functionally graded free-form and doubly-curved sandwich shells using higher-order equvalent single layer theory // Composite Structures. 2015. V. 119. P. 67–89.
8. Мельников Г.И., Иванов С.Е., Мельников В.Г., Малых К.С. Применение модифищированного метода к нелинейной динамической системе // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. №1(95). С. 149–154. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-149-154
9. Шаховал С.Н. Исследование матричных алгебраических уравнений, определяющих тензор инерции через осевые моменты инерции // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2008. №3(19). С. 196–201.
10. Мельников В.Г. Энергетический метод параметрической идентификации тензоров инерции тел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2010. №1(65). С. 59–63.
11. Melnikov V.G., Melnikov G.I., Malykh K.S., Dudarenko N.A. Poincare-Dulac method with Chebyshev economization in autonomous mechanical system simulation problem // Proc. 2015 Int. Conf. on Mechanics – 7th Polyakov's Reading. St. Petersburg, Russia, 2015. Art. 7106757.
12. Chistiakov V.V., Malykh K.S. A precise parametric equlation for the trajectory of a point projectile in the air with quadratic drag and longitudial or side wind // Proc. 2015 Int. Conf. on Mechanics – 7th Polyakov's Reading. St. Petersburg, Russia, 2015. Art. 7106721.
13. Амсонов А.А. Техническая теория тонких упругих оболочек. М.: АСВ, 2009. 303 с.
14. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. СПб.: СПбГУ, 2010.
15. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Ленанд, 2015. 272 с.

Optics, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 139–148. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-139-148 (In Russian).
6. Bulat P.V., Upyrev V.V., Denisenko P.V. Oblique shock wave reflection from the wall. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol.15, no. 2, pp. 338–345. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-2-338-345 (In Russian).
7. Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Batra R.C. Stress and strain recovery for functionally graded free-form and doubly-curved sandwich shells using higher-order equvalent single layer theory. *Composite Structures*, 2015, vol. 119, pp. 67–89.
8. Melnikov G.I., Ivanov S.E., Melnikov V. G., Malykh K.S. Application of modified conversion method to a nonlinear dynamical system. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 149–154. doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-1-149-154 (In Russian)
9. Shahoval S.N. Study of matrix algebraic equations determining the inertia tensor in axial moments. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2008, no. 3, pp. 196–201. (In Russian)
10. Melnikov V.G. An energy method for parametrical identification of object inertia tensors. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2010, no. 1, pp. 59–63. (In Russian)
11. Melnikov V.G., Melnikov G.I., Malykh K.S., Dudarenko N.A. Poincare-Dulac method with Chebyshev economization in autonomous mechanical system simulation problem. P*roc. 2015 Int. Conf. on Mechanics – 7th Polyakov's Reading*. St. Petersburg, Russia, 2015, art. 7106757.
12. Chistiakov V.V., Malykh K.S. A precise parametric equlation for the trajectory of a point projectile in the air with quadratic drag and longitudial or side wind. *Proc. 2015 Int. Conf. on Mechanics – 7th Polyakov's Reading*. St. Petersburg, Russia, 2015, art. 7106721.
13. Amsonov A.A. *Technical Theory of Thin Elastic Shells*. Moscow, ASV Publ., 2009, 303 p.
14. Novozhilov V.V. *Theory of Thin Shells*. St. Petersburg, SPbSU, 2010.
15. Il'yushin A.A. *Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory*. Moscow, Lenand Publ., 2015, 272 p.

Авторы

Малых Константин Сергеевич – аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Malykh-konstantin@yandex.ru
Мельников Геннадий Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Melnikov.ifmo@yandex.ru

Authors

Konstantin S. Malykh – postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Malykh-konstantin@yandex.ru
Gennadiy I. Melnikov – D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Melnikov.ifmo@yandex.ru