УДК 517.984.7

РАСШИРЕНИЕ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ НА ПРИМЕРЕ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

А.А. Бойцев[a], Х. Нейдхардт[b], И.Ю. Попов[a]

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, boitsevanton@gmail.com

[b] Weierstrass Institute for applied analysis and stochastics, Берлин, Германия

Аннотация. Рассмотрен способ расширения оператора, представляющего сумму тензорных произведений. Применен подход граничных троек. Один из операторов предполагается плотно заданным симметрическим оператором с равными индексами дефекта, а второй – ограниченным и самосопряженным. Для построения самосопряженных расширений рассматриваемого оператора строится граничная тройка, берущая за основу граничную тройку симметрического оператора. По граничной тройке симметрического оператора строятся гамма-поле и функция Вейля. Выражения, связывающие гамма-поле и функцию Вейля симметрического оператора с гамма-полем и функцией Вейля рассматриваемого оператора, позволяют использовать обобщенную резольвентную формулу Крейна для получения всех самосопряженных расширений и в данном случае. Теоретические результаты применяются к конкретному, с физической точки важному оператору – оператору Дирака. Для оператора Дирака построена граничная тройка, а также отвечающие ей гамма-поле и функция Вейля. С помощью формулы Крейна получены самосопряженные расширения. Полученные результаты могут быть использованы для корректного описания взаимодействия квантовых систем.

Ключевые слова: метод граничных троек, оператор Дирака, самосопряженные расширения.

Благодарности. Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01), при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.Z50.31.0031), а также при поддержке грантов Президента Российской Федерации (контракты 14.124.13.2045-МК и 14.124.13.1493-МК).

EXTENSION OF TENSOR PRODUCT FOR OPERATORS ON THE DIRAC OPERATOR EXAMPLE

A.A. Boitsev[a], H. Neidhardt[b], I.Yu. Popov[a]

[a] ITMO University, Saint Petersburg, Russia, boitsevanton@gmail.com

[b] Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Germany

The paper deals with extension method for the operator which is a sum of tensor products. Boundary triplets approach is used. One of the operators is considered to be densely defined and symmetric with equal deficiency indices, the other one is considered to be bounded and self- adjoint. For self-adjoint extensions construction of the mentioned operator, its boundary triplet is constructed in terms of boundary triplet of symmetric operator. Gamma-field and the Weyl function are obtained using the boundary triplet of symmetric operator. Formulas, connecting gamma-field and the Weyl function of symmetric operator with gamma-field and the Weyl function of the studied operator make it possible to use generic resolvent Krein-type formula for all self-adjoint extensions in this case as well. Theoretical results are applied to the Dirac operator, interesting from the physical point of view. Boundary triplet, gamma-field and the Weyl function are constructed for the Dirac operator. The self-adjoint extensions are obtained by Krein formula. Received results can be useful for correct description of quantum systems interaction.

Keywords: boundary triplets approach, Dirac operator, self-adjoint extensions.

Acknowledgements. This work was partially financially supported by the Government of the Russian Federation (grant 074-U01), the Russian Ministry of Education and Science (project 14.Z50.31.0031) and the RF President Grants (contracts 14.124.13.2045-MK и 14.124.13.1493-MK).

Введение

Операторы, представляющие из себя сумму тензорных произведений, часто возникают в вопросах квантовой механики. Исследование спектральных свойств самосопряженных операторов (наблюдаемых) является ключевым в описании поведения квантовой системы. Фундаментальное отличие квантовой физики от классической проявляется в наличии взаимодействия между частями сложной системы. К настоящему времени представлено много физических моделей взаимодействия, но все они работают с приближениями. До сих пор нет корректного математического описания взаимодействия подсистем.

В то же время в работах М. Крейна и Н. Наймарка [1, 2] описываются фундаментальная теория расширения симметрических операторов и теория обобщенных резольвент. С точки зрения физики, расширение симметрического оператора дает параметризованный набор самосопряженных операторов, из которого при правильном выборе параметров можно получить оператор, корректно описывающий взаимодействие систем.

Цель настоящей работы – получить взаимодействие между квантовыми системами, используя теорию расширений и метод граничных троек [3–14]. Мы будем рассматривать оператор S, имеющий вид $S = A \otimes I_T + I_A \otimes T$, где A – плотно заданный симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_A$, а T – ограниченный и самосопряженный оператор. Результаты для такого типа операторов получены в работе [15], мы продемонстрируем применение ранее полученных результатов на примере оператора Дирака с граничным условием вида $f(0)=0$:

$$S=-ic\frac{d}{dx}\otimes I_T+I_A\otimes\begin{pmatrix}\frac{c^2}{2} & 0\\ 0 & -\frac{c^2}{2}\end{pmatrix},$$

$$f(0)=0.$$

Линейные отношения

Линейное отношение Θ в $\mathcal{H}$ – это замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Множество всех линейных отношений в $\mathcal{H}$ обозначим $\tilde{C}(\mathcal{H})$. За $C(\mathcal{H})$ обозначим множество всех замкнутых (не обязательно плотно заданных) операторов в $\mathcal{H}$. Сопоставляя каждому оператору $T\in C(\mathcal{H})$ его график $\mathrm{gr}(T)$, мы получим, что $C(\mathcal{H})$ является подпространством $\tilde{C}(\mathcal{H})$.

Необходимость рассмотрения множества $\tilde{C}(\mathcal{H})$ в теории операторов мотивируется следующими соображениями: в отличие от множества $C(\mathcal{H})$, множество $\tilde{C}(\mathcal{H})$ замкнуто по отношению к взятию сопряженного и обратного отношений Θ^* и Θ^{-1}, которые определяются следующими соотношениями:

$$\Theta^*=\left\{\begin{pmatrix}k\\k'\end{pmatrix}:(h',k)=(h,k'),\forall\left(\begin{pmatrix}h\\h'\end{pmatrix}\in\Theta\right)\right\}\text{ и }\Theta^{-1}\left\{\{g,f\}:\{f,g\}\in\Theta\right\}.$$

Линейное отношение Θ называется симметрическим, если $\Theta\subset\Theta^*$, и самосопряженным, если $\Theta=\Theta^*$.

Граничные тройки

Мы напомним некоторые основные факты, относящиеся к граничным тройкам. Пусть S – плотно заданный симметрический оператор с равными индексами дефекта $n_\pm(S)=\dim(R_{\pm i})$, где $R_z=\ker(S^*-z)$, $z\in C_\pm$, действующий на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Определение 1 [7]. *Замкнутое расширение $\tilde{S}$ оператора S называется правильным, если $\mathrm{dom}(S)\subset\mathrm{dom}(\tilde{S})\subset\mathrm{dom}(S^*)$. Два правильных расширения $\tilde{S}'$ и $\tilde{S}$ называются дизъюнктными, если $\mathrm{dom}(\tilde{S}')\cap\mathrm{dom}(\tilde{S})=\mathrm{dom}(S)$, а к тому же трансверсальными, если $\mathrm{dom}(\tilde{S}')+\mathrm{dom}(\tilde{S})=\mathrm{dom}(S^*)$.*

Обозначим множество всех правильных расширений S, пополненное остальными расширениями S и S^*, как Ext_S. Любое самосопряженное или максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение является правильным.

Определение 2 [7]. *Тройка $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$, где $\mathcal{H}$ – вспомогательное гильбертово пространство, $\Gamma_0,\Gamma_1:\mathrm{dom}(S^*)\to\mathcal{H}$ – линейные отображения, называется граничной тройкой оператора S^*, если выполнено соотношение*

$$(S^*f,g)-(f,S^*g)=(\Gamma_1 f,\Gamma_0 g)-(\Gamma_0 f,\Gamma_1 g),\ f,g\in\mathrm{dom}(S^*),\tag{1}$$

и отображение $\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1)^T:\mathrm{dom}(S^*)\to\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ сюрьективно.

Граничная тройка $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ для оператора S^* всегда существует, если $n_+(S)=n_-(S)$. Также стоит заметить, что $n_\pm(S)=\dim(\mathcal{H})$ и $\ker(\Gamma_0)\cap\ker(\Gamma_1)=\mathrm{dom}(S)$.

С каждой граничной тройкой Π сопоставляют два канонических самосопряженных расширения $S_j=S^*\big|\ker(\Gamma_j)$, $j\in\{0,1\}$. Для любого расширения $S_0=S_0^*\in Ext_S$ найдется (вообще говоря, не единственная) граничная тройка $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ оператора S^* такая, что $S_0=S^*\,|\ker(\Gamma_0)$.

С помощью подхода граничных троек мы можем параметризовать все правильные расширения следующим образом.

Теорема 1 [5, 8]. *Пусть $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ – граничная тройка для оператора S^*. Тогда отображение*

$$Ext_S \ni \tilde{S} \to \Gamma \operatorname{dom}(\tilde{S}) = (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)^T : f \in \operatorname{dom}(\tilde{S}) = \Theta \in \tilde{C}(\mathcal{H}) \qquad (2)$$

устанавливает биекцию между Ext_S *и* $\tilde{C}(\mathcal{H})$. *Мы пишем* $\tilde{S} = S_\Theta$, *если* $\tilde{S}$ *отвечает* Θ *по биекции* (2). *Кроме того*, *верны следующие предложения*:

1. $S_\Theta^* = S_{\Theta^*}$, *кроме того*, $S_\Theta^* = S_\Theta$ *в том и только том случае*, *когда* $\Theta = \Theta^*$.
2. S_Θ *является симметрическим* (*самосопряженным*) *в том и только том случае*, *когда* Θ – *симметрическое* (*самосопряженное*) *отношение.*
3. *Расширения* S_0 *и* S_Θ *дизъюнктны* (*трансверсальны*) *в том и только том случае*, *если найдется замкнутый* (*ограниченный*) *оператор B такой*, *что* $\Theta = \operatorname{gr}(B)$. *В таком случае биекция принимает вид* $S_\Theta = S_{\operatorname{gr}(B)} = S^* \big| \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$.

В частности, $S_j = S^* \big| \ker(\Gamma_j) = S_{\Theta_j}$, $j \in \{0,1\}$, где $\Theta_0 = \{0\} \times \mathcal{H}$ и $\Theta_1 = \mathcal{H} \times \{0\} = gr(\mathrm{O})$, где O – нулевой оператор в $\mathcal{H}$. Также стоит отметить, что $\tilde{C}(\mathcal{H})$ содержит тривиальные линейные соотношения $\{0\} \times \{0\}$ и $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, которые параметризуют расширения S и S^* соответственно для любой граничной тройки Π.

Гамма-поле, функция Вейля и формула Крейна

Напомним некоторые факты, касающиеся гамма-поля и функции Вейля.

Определение 3 [4, 5]. *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – *граничная тройка для оператора* S^* *и* $S_0 = S^* \big| \ker(\Gamma_0)$. *Операторнозначные функции* $\gamma(\cdot) : \rho(S_0) \to [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ *и* $M(\cdot) : \rho(S_0) \to [\mathcal{H}]$, *определяемые соотношениями* $\gamma(z) = (\Gamma_0 | R_z)^{-1}$, $M(z) = \Gamma_1 \gamma(z)$, $z \in \rho(S_0)$, *называются гамма-полем и функцией Вейля*, *отвечающими граничной тройке* Π, *соответственно.*

Очевидно, что функция Вейля может быть определена и другим образом, как $M(z)\Gamma_0 f_z = \Gamma_1 f_z$, $f_z \in R_z$, $z \in \rho(S_0)$.

Также следует заметить, что гамма-поле и функция Вейля голоморфны на $z \in \rho(S_0)$.

Для любого правильного (не обязательно самосопряженного) расширения $\tilde{S}_\Theta \in Ext_S$ с непустым резольветным множеством $\rho(\tilde{S}_\Theta)$ имеет место следующая формула Крейна [4, 5]:

$$(S_\Theta - z)^{-1} - (S_0 - z)^{-1} = \gamma(z)(\Theta - \mathrm{M}(z))^{-1} \gamma^*(\bar{z}),\ z \in \rho(S_0) \cap \rho(S_\Theta). \qquad (3)$$

Данная формула расширяет стандартную формулу Крейна, которая справедлива для канонических расширений, на любые $\tilde{S}_\Theta \in Ext_S$ с $\rho(\tilde{S}_\Theta) \neq \varnothing$. Кроме того, ввиду определения гамма-поля и функции Вейля, данная формула имеет прямую связь с граничными тройками.

Ранее полученные результаты

Пусть A – плотно заданный симметрический оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве H_A, а T – ограниченный самосопряженный оператор, заданный на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_T$. Рассматривается оператор $S = A \otimes I_T + I_A \otimes T$. Данный оператор определяется как замыкание оператора $A \odot I_T + I_A \odot T$ так, что

$$\operatorname{dom}(A \odot I_T + I_A \odot T) = \left\{ f = \sum_{k=1}^{n} g_k \otimes h_k : g_k \in \operatorname{dom}(A),\ h_k \in \mathcal{H}_T \right\}$$

и

$$(A \odot I_T + I_A \odot T) f = \sum_{k=1}^{n} (A g_k \otimes h_k + g_k \otimes T h_k),\ f \in \operatorname{dom}(A \odot I_T + I_A \odot T).$$

Оператор S оказывается замкнутым симметрическим оператором [9].

Теорема 2 [15]. *Если* $\Pi_A = \{\mathcal{H}_A, \Gamma_0^A, \Gamma_1^A\}$ – *граничная тройка оператора* A^*, *тогда* $\Pi_S = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^S, \Gamma_1^S\}$ – *граничная тройка для оператора* S^*, *где*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_T,\quad \Gamma_0^S = \Gamma_0^A \otimes I,\quad \Gamma_1^S = \Gamma_1^A \otimes I.$$

Для гамма-поля и функции Вейля верны следующие результаты.

Теорема 3 [15]. *Пусть* $\Pi_A = \{\mathcal{H}_A, \Gamma_0^A, \Gamma_1^A\}$ *– граничная тройка оператора* A^* *с гамма-полем* $\gamma_A(z)$. *Если* $\Pi_S = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^S, \Gamma_1^S\}$ *– граничная тройка для оператора* S^*, *то гамма-поле* $\gamma_S(z)$, *отвечающее граничной тройке* Π_S *допускает представление*

$$\gamma_S(z) = \int_a^b d\widehat{E}_T(\lambda)\gamma_A(z-\lambda)\otimes I_{\mathcal{H}_T} = \int_a^b \gamma_A(z-\lambda)\otimes I_{\mathcal{H}_T} d\widehat{E}_T(\lambda),$$

где $z \in \mathbb{C}_{\pm}$, $\sigma(T) \subset [a,b)$.

Теорема 4 [15]. *Пусть* $\Pi_A = \{\mathcal{H}_A, \Gamma_0^A, \Gamma_1^A\}$ *– граничная тройка оператора* A^* *с функцией Вейля* $M_A(z)$. *Если* $\Pi_S = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^S, \Gamma_1^S\}$ *– граничная тройка для оператора* S^*, *то функция Вейля* $M_S(z)$, *отвечающая граничной тройке* Π_S, *допускает представление*

$$M_S(z) = \int_a^b d\widehat{E}_T(\lambda)M_A(z-\lambda)\otimes I_{\mathcal{H}_T} = \int_a^b M_A(z-\lambda)\otimes I_{\mathcal{H}_T} d\widehat{E}_T(\lambda),$$

где $z \in \mathbb{C}_{\pm}$, $\sigma(T) \subset [a,b)$.

Расширение оператора Дирака

Рассмотрим оператор Дирака

$$S = -ic\frac{d}{dx}\otimes I_T + I_A \otimes \begin{pmatrix} \frac{c^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{c^2}{2} \end{pmatrix},$$

заданный на $\mathcal{H}_S = L_2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}^2$. Симметрическое сужение данного оператора может быть получено сужением оператора $-i\frac{d}{dx}$, а именно условием на область определения $f(0)=0$. Пользуясь приведенными выше результатами (теоремы 2–4), получим граничную тройку Π_S, гамма-поле и функцию Вейля для оператора S^*. Для этого сначала построим граничную тройку Π_A. Интегрируя по частям, имеем:

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = ic\left(f(0+)\overline{g}(0+) - f(0-)\overline{g}(0-)\right).$$

Легко проверить, что операторы

$$\Gamma_0^A f = -i\sqrt{2c}\,\frac{f(0-)-f(0+)}{2},\ \Gamma_1^A = -\sqrt{2c}\,\frac{f(0-)+f(0+)}{2}$$

являются сюрьективными и удовлетворяют соотношению (1).

Тем самым, на основании теоремы 2, граничная тройка Π_S запишется соотношениями $\Gamma_0^S = \Gamma_0^A \otimes \mathrm{I}$, $\Gamma_1^S = \Gamma_1^A \otimes I$. Чтобы вычислить гамма-поле, необходимо построить дефектный элементы оператора A, имеющего индексы дефекта $(1,1)$. Его можно записать следующим образом:

1. Если $\mathrm{Im}(z) > 0$, то

$$f_+(x) = \begin{cases} e^{\frac{izx}{c}}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}.$$

2. Если $\mathrm{Im}(z) < 0$, то

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, x \ge 0 \\ e^{\frac{izx}{c}}, x < 0 \end{cases}.$$

Теперь мы можем выписать гамма поле $\gamma_{\mathrm{A}}(z)$:

$$\gamma_A(z) = \begin{cases} -i\sqrt{\dfrac{2}{c}}, \mathrm{Im}(z) > 0 \\ i\sqrt{\dfrac{2}{c}}, \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}.$$

Гамма-поле $\gamma_S(z)$ получается из теоремы 3. Для функции Вейля $M_A(z)$ верно выражение

$$M_A(z) = \begin{cases} i, \operatorname{Im}(z) > 0 \\ -i, \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases}.$$

Теперь на основании теоремы 4 мы можем написать, что $M_S(z) = M_A(z - T)$. Используя формулу (3), мы получим множество всех самосопряженных расширений оператора S.

Заключение

В работе проведен обзор результатов, полученных для оператора $S = A \otimes I_T + I_A \otimes T$, где A – плотно заданный, симметрический оператор, а T – ограниченный и самосопряженный оператор. В частности, оператор Дирака попадает под данный вид. Мы построили гамма-поле и функцию Вейля для этого оператора, используя технику граничных троек. С помощью формулы Крейна получена параметризация всех самосопряженных расширений.

Литература

1. Крейн М.Г., Лангер Г.К. Дефектные подпространства и обобщенные резольвенты в пространстве Π_k // Функциональный анализ и его приложения. 1971. № 3. С. 54–69.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
3. Baumgartel H., Wollenberg M. Mathematical scattering theory. Berlin: Academie-Verlag, 1983.
4. Derkach V.A., Malamud M.M. On the Weyl function and Hermite operators with lacunae // Dokl. Ak. Nauk USSR. 1987. V. 293. N 5. P. 1041–1046.
5. Derkach V.A., Malamud M.M. Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // Journal of Functional Analysis. 1991. V. 95. N 1. P. 1–95.
6. Derkach V.A., Malamud M.M. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem // Journal of Mathematical Sciences. 1995. V. 73. N 2. P. 141–242.
7. Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L. Boundary value problems for operator differential equations. Kluwer, Dordrecht, 1990. 364 p.
8. Malamud M.M. Some classes of extensions of a Hermitian operator with lacunae // Ukraine Mat. Zh. 1992. V. 44. N 2. P. 215–233.
9. Malamud M.M., Neidhardt H. Sturm-liouville boundary value problems with operator potentials and unitary equivalence // Journal of Differential Equations. 2012. V. 252. N 11. P. 5875–5922.
10. Smudgen K. Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space. Springer, 2012. 432 p.
11. Malamud M.M., Malamud S.M. Spectral theory of operator measures in a Hilbert space // Algebra i analiz. 2003. V. 15. N 3. P. 1–77.
12. Gorbachuk M.L. Self-adjoint boundary problems for a second-order differential equation with unbounded operator coefficient // Functional Analysis and Its Applications. 1971. V. 5. N 1. P. 9–18.
13. Birman M.S. Existence conditions for wave operators // Izv. Akad. Nauk SSSR. 1963. N 27. P. 883–906.
14. Маламуд М.М., Найдхардт Х. О теоремах Като-Розенблюма и Вейля-неймана // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 432. № 2. С. 162–166.
15. Boitsev A.A., Neidhardt H., Popov I.Yu. Weyl function for sum of operators tensor product // Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. 2013. V. 4. N 6. P. 747–759.

Бойцев Антон Александрович – студент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, boitsevanton@gmail.com

Нейдхардт Хаген – доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Weierstrass Institute for applied analysis and stochastics, Берлин, Германия, Hagen.neidhardt@wias-berlin.de

Попов Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, popov1955@gmail.com

Anton A. Boitsev – student, ITMO University, Saint Petersburg, Russia, boitsevanton@gmail.com

Hagen Neidhardt – D.Sc., Scientific researcher, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Germany, Hagen.neidhardt@wias-berlin.de

Igor Yu. Popov – D.Sc., Professor, Department head, ITMO University, Saint Petersburg, Russia, popov1955@gmail.com

Принято к печати 02.06.14
Accepted 02.06.14